Der Resonanz-Undograph

Ein Mittel zur Messung des Ungleichförmigkeitsgrades

Von der Königlich Technischen Hochschule zu München

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften
(Doktor-Ingenieurs)

genehmigte Dissertation

Vorgelegt von

Otto Mader
Diplom-Ingenieur und Assistent an der Königlich technischen Hochschule zu München

Referent: Prof. **J. Ossanna**
Korreferent: Prof. **W. Lynen**

Berlin 1909
RICHARD DIETZE
Verlag von Dinglers polytechnischem Journal.

Der Resonanz-Undograph

Ein Mittel zur Messung des Ungleichförmigkeitsgrades

Von der Königlich Technischen Hochschule zu München

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften

(Doktor-Ingenieurs)

genehmigte Dissertation

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Vorgelegt von

Otto Mader

Diplom-Ingenieur und Assistent an der Königlich technischen Hochschule zu München

Referent: Prof. **J. Ossanna**

Korreferent: Prof. **W. Lynen**

Berlin 1909

RICHARD DIETZE

Verlag von Dinglers polytechnischem Journal.

Inhaltsübersicht.

	Seite	Figur
A. Einleitung.		
Gegenstand der Messung	1	—
Jedes periodische Gesetz, eine Uebereinanderlagerung einzelner „harmonischer" Schwingungen	1	1
Graphisches Beispiel einer „harmonischen" Analyse	1	2
Einfluß der harmon. Schwingungen auf ein Tachometer	2	—
Benutzung der Resonanzerscheinung zu Messungen	2	—
B. Theorie des Resonanz-Undographen.		
Ansatz der zu verwendenden physikalischen Größen	2	3—5
Aufstellung und Auswertung der Bewegungsgleichung	3	—
Vereinfachter Fall: Eine Erregerwelle allein vorhanden	4	—
Lagenbeziehung zwischen der Ebene SS' und dem Körper m	4	—
Einfluß der Schwingungen anderer Periode	4	6 u. 7
Einfluß der Dämpfung λ	5	—
C. Konstruktion des Resonanz-Undographen.		
1. *Die Wirbelstrombremse.*		
Ihre Bedeutung in der Rechnung	5	8—18
Die Lagerung der Schwingmagneten	7	19—22
Einfluß der Aenderung des Reibungskoeffizienten	7	23—26
Form des Magneten und der Bremsscheibe	8	27—30
Stromzuführung	9	—
2. *Bestimmung der Eigenschwingungszeit.*		
Ihre Bedeutung in der Rechnung	9	—
Aenderung der Federwindungen oder des Trägheitsmomentes	9	—
3. *Die Amplituden-Schreibvorrichtung.*		
Die Trommel	9	31—38
Der Schreibhebel	10	—
Diagrammkorrektur	10	—
4. *Der Zeitschreiber*	10	—
5. *Der Antrieb*	10	—
D. Prüfung des Resonanz-Undographen.		
1. *Prüfungsverfahren*	11	—
a) Gewichte oder Federn	11	39
b) *Hooke*sches Gelenk	11	40
Allgemeines.		
Entwickelung in eine *Fourier*sche Reihe	11	41—43
Anordnung eines Versuchsstandes	12	—
c) Kurbelschleife	12	—
Allgemeines.		
Entwickelung in eine *Fourier*sche Reihe	13	—
Anordnung eines Versuchsstandes	13	—
2. *Prüfung des Resonanz-Undographen, Modell I durch das Hooke*sche *Gelenk.*		
Versuchsanordnung	13	
Uebersetzungsverhältnis des Schreibzeuges	13	—
Resultate	13	44—47
3. *Prüfung des Resonanz-Undographen, Modell II durch die Kurbelschleife.*		
Versuchsanordnuug	14	48
Uebersetzungsverhältnis des Schreibzeuges	14	—
Resultate	15	49—53
E. Anwendung des Resonanz-Undographen.		
1. *Untersuchungen an einem 35 PS-Dieselmotor.*		
Versuchsanordnung	15	—
Uebersetzungsverhältnis des Schreibzeuges	15	—
Resultate	15	56—58
2. *Untersuchung einer 850 KW-Drehstrommaschine.*		
Versuchsanordnung	17	—
Uebersetzungsverhältnis des Schreibzeuges	17	55
Resultate	17	56—58
Folgerungen	18	—
3. *Anwendungsgebiete*	18	—
F. Anhang (Nebenrechnungen).		
1. *Auswertung der allgemeinen Integrale*	19	—
2. *Koeffizientenauswertung für das Hooke*sche *Gelenk*	19	—
3. *Koeffizientenauswertung für die Kurbelschleife*	20	—

Der Resonanz-Undograph, ein Mittel zur Messung der Winkelabweichung.

Von Dipl.-Ing. **O. Mader**, München.

A. Einleitung.

Im Folgenden soll ein neues Meßverfahren mitgeteilt werden, das nicht nur wegen seiner eigenen Bedeutung, sondern auch wegen seines anderweitig anwendbaren Prinzipes Beachtung verdienen dürfte.

Gegenstand der Messung.

Jede rotierende Kraftmaschine zeigt, auch bei gleichmäßiger Belastung, Abweichungen von der gewünschten gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit. Unter der Voraussetzung einer gleichbleibenden Tourenzahl läßt sich dann das Gesetz der Winkelgeschwindigkeit v darstellen durch:

$$v = \psi(t),$$

wo $\psi(t)$ eine periodische Funktion der Zeit t vorstellt. Die Periode dieser Funktion stimmt überein mit einer „Kraftzuführungsperiode" der Maschine (T).

Der jeweilige Drehungswinkel der Maschinenwelle wird dann bestimmt durch:

$$\alpha = \int_0^t v\,dt = \int_0^t \psi(t)\,dt,$$

wo α den in der Zeit t beschriebenen Drehwinkel vorstellt. Wäre v konstant, so würde α gleichförmig zunehmen. Infolge der ungleichförmigen Winkelgeschwindigkeit wird jedoch eine gewisse „Winkelabweichung" eintreten. Unter „Winkelabweichung" versteht man den Unterschied zwischen der jeweiligen Winkelstellung der Maschine und derjenigen Stellung, welche diese bei vollkommen gleichmäßiger Drehung in dem betreffenden Augenblick einnehmen würde. Diese Winkelabweichung zu messen, ist der Zweck des nachstehend beschriebenen neuen Instrumentes, Resonanz-Undograph genannt.

Jedes periodische Gesetz, eine Uebereinanderlagerung einzelner „harmonischer" Schwingungen.

Die Wirkungsweise des Resonanz-Undographen fußt darauf, daß jedes periodische Gesetz, z. B.

$$v = \psi(t),$$

sich als eine Uebereinanderlagerung einzelner sogenannter „harmonischer" Schwingungen, d. h. als eine

„*Fourier*sche Reihe"

auffassen läßt. Um dies zu erkennen, sei an folgenden, von *Fourier* zuerst als allgemein gültig aufgestellten Satz aus der Reihenlehre erinnert:

Eine willkürlich wählbare Funktion $f(x)$ sei in dem Intervall $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ eindeutig definiert. Dann gibt es für dieselbe eine Darstellung durch die Reihe:

$$f(x) = {}^1/_2 b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \ldots + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots,$$

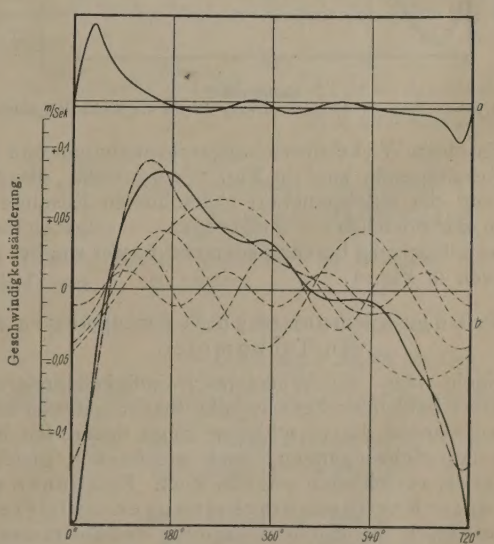
welche nach cos und sin der Vielfachen von x fortschreitet und deren Koeffizienten nach dem Gesetz

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin n x\,dx$$

und

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos n x\,dx$$

gebildet werden. Die Durchführung dieser Darstellung nennt man „harmonische Analyse". (Näheres siehe: Dr. *R. Fricke*, „Kurzgefaßte Vorlesungen über verschiedene Gebiete d. höh. Mathematik").



Kurbelwinkel.
a Tangentialdrucklinie eines Dieselmotors, b Darstellung der Geschwindigkeiten,
——— errechnet aus Tangentialdruck für $\delta = {}^1/_{80}$,
– – – harmonische Schwingung,
— · — · — resultierende der vier ersten harmon. Schwingungen.
Fig. 1.

Graphisches Beispiel einer „harmonischen Analyse".

Mehrfach ausgeführt wurde die Zerlegung in einzelne harmonische Schwingungen für die Tangentialkraftkurven von Kolbenmaschinen. Hier sei als Beispiel die aus der Tangentialkraftkurve eines Dieselmotors nach der üblichen Rechnung sich ergebende Kurve

der Winkelgeschwindigkeiten gewählt. (Fig. 1). Angenommen wurde ein Ungleichförmigkeitsgrad $\delta = 1/80$ und eine Tourenzahl $n = 190$ i. d. Min., so daß die mittlere Winkelgeschwindigkeit $v_m = 19{,}9 = 20$ m/Sek. wird. Mittels des von Prof. *S. Finsterwalder* (Zeitschrift f. Math. und Phys. 1898, S. 85) angegebenen graphischen Verfahrens wurde die harmonische Analyse für die 4 ersten Glieder der *Fourier*schen Reihe durchgeführt. Es ergab sich die Winkelgeschwindigkeit v in mm/Sek. am Radius 1 m zu:

$$v = 20000 + 44{,}5 \sin 10t + 12 \sin 20t - 0{,}3 \sin 30t - 3{,}6 \sin 40t + \ldots$$
$$- 45 \cos 10t - 39{,}4 \cos 20t - 28 \cos 30t - 11{,}5 \cos 40t + \ldots$$

Die daraus folgende Winkelstellung (α) der Maschine wird durch Integration nach der Zeit gewonnen:

$$\alpha = \int v dt,$$

was ergibt:

$$\alpha = 20000\, t - 4{,}45 \cos 10\, t - 0{,}59 \cos 20\, t + 0{,}023 \cos 30\, t + 0{,}09 \cos 40\, t + \ldots$$
$$- 4{,}5 \sin 10\, t - 1{,}97 \sin 20\, t - 0{,}95 \sin 30\, t - 0{,}29 \sin 40\, t + \ldots$$

wo α in mm am Radius 1 m gemessen ist. Es teilt sich α in zwei Teile:

α = Winkelstellung bei gleichförmiger Drehung + Winkelabweichung.

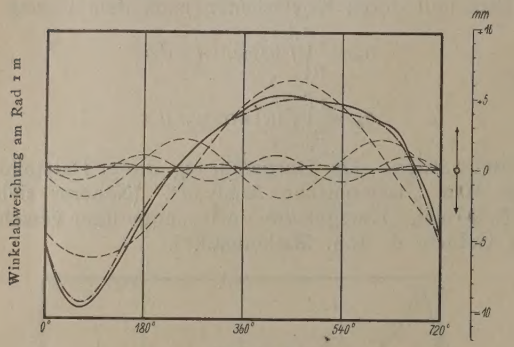


Fig 2. Darstellung der Winkelabweichung wie bei den Geschwindigkeiten.

Die einzelnen Winkelabweichungsschwingungen und deren Resultierende sind in Fig. 2 dargestellt, die Annäherung der strichpunktiert gezeichneten Resultierenden an die ebenfalls — ausgezogen — eingezeichnete genaue α-Kurve ist bereits bedeutend besser wie bei den v-Kurven in Fig. 1.

Einfluß der harmonischen Schwingungen auf ein Tachometer.

Sucht man die Winkelgeschwindigkeitsänderung durch die bekannten Zentrifugalkrafttachometer zu messen, so werden die verschieden lange dauernden harmonischen Schwingungen, auch solche von gleicher Amplitude, verschieden aufgezeichnet. Es können sogenannte Resonanzerscheinungen auftreten, die nur durch die eigene Dämpfung des Instrumentes unschädlich gemacht werden können. Die Ursache dafür liegt in der Elastizität einerseits des üblichen Bandantriebes, anderseits der Meßfedern.

Benutzung der Resonanzerscheinung zu Messungen.

Gerade die bei Benutzung der Federtachometer auftretenden, dort als ein Fehler empfundenen Resonanzerscheinungen, die sehr gesetzmäßig verlaufen und sich auch rechnerisch verfolgen lassen, legten dem Verfasser den Gedanken nahe, sie absichtlich hervorzurufen und zu Messungen zu benutzen. Denn dieses Verfahren ermöglicht es, ganz allgemein gesprochen, den Einfluß sehr kleiner zu messender Größen auf das Meßinstrument beliebig oft zu wiederholen und die jedesmal eintretende Wirkung aufzuspeichern. So gelangt man durch Aneinanderreihung solcher Einzelwirkungen zu praktisch brauchbaren Beobachtungsgrößen.

Als Beispiel sei auf das von den Physikern angewandte Multiplikationsgalvanometer hingewiesen.

In ähnlicher Weise versuchte der Verfasser auf Grund vorhergehender rechnerischer Ueberlegung einen Meßapparat zu bauen, der unter dem Einflusse der wechselnden Winkelgeschwindigkeit einer Kraftmaschine stehen, jeweils jedoch nur für eine Schwingung dieser Winkelgeschwindigkeit durch Resonanz empfindlich sein sollte. Die Größe dieser jeweiligen Schwingung oder der daraus folgenden Winkelabweichungsschwingung sollte möglichst graphisch aufgezeichnet werden.

Das Resultat dieser Versuche ist der

Resonanz-Undograph[1]),

dessen

Theorie, Konstruktion,
Prüfung und Anwendung

in den folgenden Abschnitten gebracht werden sollen.

B. Theorie des Resonanz-Undographen.

Ansatz der zu verwendenden physikalischen Größen.

Ein Körper von der Masse m sei mit zwei festen Punkten I und II durch Spiralfedern verbunden (vgl. Fig. 3).

Er drücke mit seinem Gewicht G und anderen auf ihm lastenden, senkrecht zu den Federnachen verlaufenden Kräften P auf eine Horizontalebene UU'. Die Masse der Federn sei verschwindend klein.

Bewegt man den Körper (kurz m genannt) aus seiner Mittellage, in der sich die Federkräfte gerade ausgleichen, um x cm heraus, so wird ihn eine Kraft

$$F = \alpha^2 x$$

dahin zurückzuführen streben. Die Konstante α^2 bestimmt sich aus den Eigenschaften der Federn.

Auf m wirkt aber auch noch die stets nur bremsende Kraft der Reibung

$$R = (P + G) f,$$

wobei wir, vorbehaltlich späterer Weiterungen, den Reibungskoeffizienten f vorerst konstant annehmen.

Ueberlassen wir nun den Körper m sich selbst, so wird er eine, durch die Reibung stark gedämpfte, bald erlöschende Schwingung um seine Mittellage ausführen. (Vgl. *Lorenz*, „Technische Mechanik starrer Systeme", § 25, S. 173 u. folg.).

Bewegen wir jedoch gleichzeitig die Unterlage UU' so rasch in irgendeiner Richtung vorwärts (mit der Geschwindigkeit v), daß die Relativbewegung des Körpers gegen seine Unterlage stets in derselben Richtung verläuft, so werden wir die Reibung als eine konstante, in der Bewegungsrichtung der Unterlage wirkende Kraft R betrachten können.

Außer der Reibung besteht jedoch noch eine weitere, jeder Bewegung Widerstand leistende Kraft L, die sich vor allem aus dem Luftwiderstand und der bei dem Dehnen der Federn auftretenden Molekularreibung zu-

[1]) Resonanz-Undograph ist später mehrfach mit R.-U. abgekürzt geschrieben.

sammensetzt. Diese Kraft läßt sich ungefähr direkt proportional der Geschwindigkeit des Körpers m setzen:

$$L=\lambda\cdot\frac{dx}{dt},$$

wo x den jeweiligen Abstand von der Mittellage, t die Zeit und λ eine Konstante vorstellen.

Fig. 3

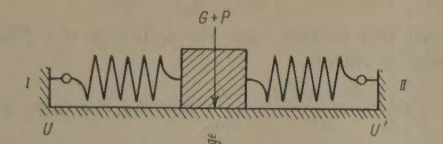


Fig. 4

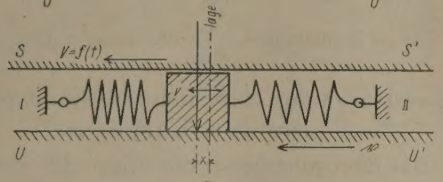
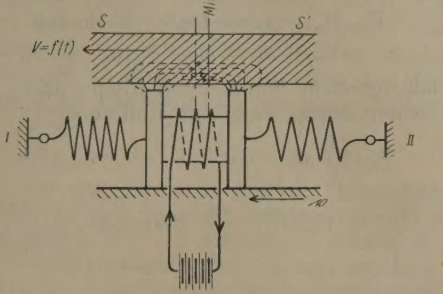


Fig. 5.



Nun denke man sich über den Körper m eine Ebene SS' mit einer periodisch wechselnden, absoluten Geschwindigkeit $V=f(t)$ hinweggleiten (vgl. Fig. 4). Diese Ebene habe die Eigenschaft, daß sie eine der Relativgeschwindigkeit gegenüber m proportional, in deren Richtung wirkende, mitnehmende Kraft II auf die Masse m ausübe:

$$II=\varepsilon\left(V-\frac{dx}{dt}\right),$$

wo ε eine Konstante. Physikalisch findet sich diese Forderung bei den zur Bestimmung der Arbeitsleistung von Kraftmaschinen verwendeten elektrischen Wirbelstrombremsen verwirklicht, wenigstens für geringe Geschwindigkeitsänderungen.

Um diese Konstruktion hier nachzuahmen, hat man nur den Schwingungskörper m geeignet als Elektromagneten auszubilden und durch den so erzeugten Kraftlinienstrom die aus einem metallischen Leiter wie Kupfer oder Eisen bestehende Ebene SS' hindurchzuführen. (vgl. Fig. 5). Die Konstante ε wird dann nur von der Anzahl der Kraftlinien abhängen, d. h. in erster Linie von der Magneterregung. Damit ε konstant bleibe, muß also der Erregerstrom möglichst konstant bleiben (Akkumulatorenstrom). Es muß aber auch der Widerstand im Kraftlinienstrom konstant erhalten werden, der in der Hauptsache von dem Luftspalt zwischen Magnet und Ebene SS' gebildet wird. Also ist bei einer späteren konstruktiven Verwirklichung dieser ganzen Grundidee auf die Einhaltung eines konstanten Luftspaltes zu achten.

Aufstellung und Auswertung der Bewegungsgleichung.

Unter dem Einfluß aller auf den Magneten wirkenden Kräfte wird dieser eine Bewegung ausführen nach dem allgemeinen Gesetze:

$$mb=\Sigma P,$$

wo b die Beschleunigung vorstellt, also

$$b=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Somit lautet in unserem Falle die Bewegungsgleichung:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=R+II-F-L=R+\varepsilon\left(V+\frac{dx}{dt}\right)-\alpha^2x-\lambda\frac{dx}{dt}$$

oder etwas anders angeordnet:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+(\varepsilon+\lambda)\frac{dx}{dt}+\alpha^2x=R+\varepsilon V=R+\varepsilon f(t)$$

Dies ist die Differentialgleichung einer erzwungenen gedämpften Schwingung, in der Form dargestellt, wie sie in *Lorenz*, „Technische Mechanik starrer Systeme", § 28, 29 und 30 abgeleitet wird. Dort wird gezeigt, daß durch Zerlegung des Ausschlages x in zwei Teile $x'+x''=x$ die Differentialgleichung ebenfalls in zwei Teile zerfällt, nämlich in

$$m\frac{d^2x'}{dt^2}+(\varepsilon+\lambda)\frac{dx'}{dt}+\alpha^2x'=0 \qquad \text{und}$$

$$m\frac{d^2x''}{dt^2}+(\varepsilon+\lambda)\frac{dx''}{dt}+\alpha^2x''=R+\varepsilon f(t).$$

Die erste Gleichung führt auf gedämpfte Eigenschwingungen, die bald erlöschen. Einige Zeit nach der Einleitung des Schwingungsvorganges wird nur noch der durch die zweite Gleichung bestimmte Ausschlag x'' merklich bleiben. Somit genügt eine Verfolgung der zweiten Gleichung. Stellt man den, meist „Störungsfunktion" genannten Ausdruck $R+\varepsilon\cdot f(t)$ durch eine *Fourier*sche Reihe dar, so nimmt die Diff.-Gleichung die Form an:

$$m\frac{d^2x''}{dt^2}+(\varepsilon+\lambda)\frac{dx''}{dt}+\alpha^2x''=A_0+A_1\cos\alpha_0t+A_2\cos2\alpha_0t+\ldots$$
$$B_1\sin\alpha^0t+A_2\sin2\alpha^0t+\ldots$$

wo

$$R+\varepsilon\cdot f(t)=A_0+A_1\cos\alpha_0t+A_2\cos2\alpha_0t+\ldots$$
$$B_1\sin\alpha_0t+B_2\sin2\alpha_0t+\ldots$$

Die Lösung dieser Gleichung ist bekannt. Es wird (vgl. *Lorenz*, . . . S. 222):

$$x''=C_0+C_1\cos\alpha_0t+C_2\cos2\alpha_0t+\ldots$$
$$+D_1\sin\alpha_0t+D_2\sin2\alpha_0t+\ldots$$

wo sich die Konstanten C und D bestimmen aus

$$C_k=\frac{(\alpha^2-k^2m\alpha_0^2)\,A_k-k\alpha_0\;(\varepsilon+\lambda)\,B_k}{(\alpha^2-k^2m\alpha_0^2)^2\;+k^2\alpha_0^2\,(\varepsilon+\lambda)^2}\quad\text{und}$$

$$D_k=\frac{(\alpha^2-k^2m\alpha_0^2)\,B_k+k\alpha_0\;(\varepsilon+\lambda)\,A_k}{(\alpha^2-k^2m\alpha_0^2)^2\;+k^2\alpha_0^2\,(\varepsilon+\lambda)^2}$$

Hier kann k der Reihe nach jede ganze positive Zahl bedeuten. Wir erhalten auf Grund dieser Lösung eine Reihe übereinander gelagerter erzwungener Schwingungen, jedoch erkennt man,

„daß die beiden Koeffizienten des $k$ten erzwungenen Welle infolge der Dämpfung nicht aus denen der entsprechenden Welle der Störungsfunktion, der sogenannten erregenden Welle, durch Multiplikation mit einem und demselben Faktor hergeleitet werden können."

Vereinfachter Fall: Eine Erregerwelle allein vorhanden.

Um den Einfluß der Konstanten C und D übersichtlich darstellen zu können, sei einmal angenommen, die Geschwindigkeit $V=f(t)$ bestehe aus einer konstanten Geschwindigkeit (V_m) und einer einzigen Erregerwelle, dargestellt durch

$$A_k \cos k\alpha_0 t + B_k \sin k\alpha_0 t.$$

$A_1, A_2, \ldots A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots$ und $B_1, B_2, \ldots B_{k-1}, B_{k+1}, \ldots$ seien gleich 0; dann würde sich die Differentialgleichung vereinfachen zu:

$$m\frac{d^2x''}{dt^2} + (\varepsilon+\lambda)\frac{dx''}{dt} + \alpha^2 x'' = R + \varepsilon V_m + \varepsilon(A_k \cos k\alpha_0 t + B_k \sin k\alpha_0 t),$$

woraus folgt:

$$x'' = C_0 + C_k \cos k\alpha_0 t + D_k \sin k\alpha_0 t = \frac{\alpha^2(R+\varepsilon V_m)}{\alpha^4} + \varepsilon\cdot\frac{(\alpha^2 - k^2 m\alpha_0^2) A_k - k\alpha_0 (\varepsilon+\lambda) B_k}{(\alpha^2 - k^2 m\alpha_0^2)^2 + k^2\alpha_0^2(\varepsilon+\lambda)^2}\cdot\cos k\alpha_0 t + \varepsilon\cdot\frac{(\alpha^2 - k^2 m\alpha_0^2) B_k + k\alpha_0 (\varepsilon+\lambda) A_k}{(\alpha^2 - k^2 m\alpha_0^2)^2 + k^2\alpha_0^2(\varepsilon+\lambda)^2}\cdot\sin k\alpha_0 t$$

Führen wir die etwas geänderte Schreibweise ein:

$$A_k \cos k\alpha_0 t + B_k \sin k\alpha_0 t = a_k \sin k(\alpha_0 t + \beta_k), \text{ wo}$$

$$tg\, k\beta_k = \frac{A_k}{B_k} \text{ und } a_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \text{ ferner}$$

$$C_k \cos k\alpha_0 t + D_k \sin k\alpha_0 t = b_k \sin k(\alpha_0 t + \delta_k), \text{ wo}$$

$$tg\, k\delta_k = \frac{C_k}{D_k} \text{ und } b_k = \sqrt{C_k^2 + D_k^2}, \text{ so wird}$$

$$x'' = \frac{R+\varepsilon V_m}{\alpha^2} + \sqrt{C_k^2 + D_k^2}\sin k(\alpha_0 t + \delta_k)$$

$$= \frac{R+\varepsilon V_m}{\alpha^2} + \cdot \sin k(\alpha_0 t + \delta^k) \sqrt{\frac{\varepsilon^2\cdot(A_k^2 + B_k^2)}{(\alpha^2 - k^2 m\alpha_0^2)^2 + k^2\alpha_0^2(\varepsilon+\lambda)^2}}$$

$$= \frac{R+\varepsilon V_m}{\alpha^2} + a_k \cdot \sin k(\alpha_0 t + \delta_k) \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{(\alpha^2 - k^2 m\alpha_0^2)^2 + k^2\alpha_0^2(\varepsilon+\lambda)^2}}$$

$$= \frac{R+\varepsilon V_m}{\alpha^2} + \sin k(\alpha_0 t + \delta_k) \sqrt{\varepsilon^2\cdot\frac{(A_k^2 + B_k^2)(\alpha^2 - k^2 m\alpha_0^2)^2 - 2(\alpha^2 - k^2 m\alpha_0^2) k\alpha_0 (\varepsilon+\lambda) A_k B_k + 2(\alpha^2 - k^2 m\alpha_k^2) k\alpha_0 (\varepsilon+\lambda) B_k A_k + (A_k^2 + B_k^2)(k\alpha_0(\varepsilon+\lambda))^2}{[(\alpha^2 - k^2 m\alpha_0^2)^2 + k^2\alpha_0^2(\varepsilon+\lambda)^2]^2}}$$

Dies heißt, je nach der Federkonstanten α^2 ändert sich die Amplitude b_k der erzwungenen Schwingung der Masse m:

$$b_k = a_k \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{(\alpha^2 - k^2 m\alpha_0^2)^2 + k^2\alpha_0^2(\varepsilon+\lambda)^2}}$$

und ebenso der sogenannte „Phasenverschiebungswinkel“

$$k(\beta_k - \delta_k).$$

In Fig. 6 ist der Verlauf von b_k als Funktion von α aufgezeichnet für $m=1$, $k=2$, $\lambda=0$, $A_k=1$, $B_k=0$, $\alpha_0=\frac{1}{30}$ und für verschiedene Werte von ε.

Wie die Auswertung der Formeln sofort ergibt, wird die Amplitude im allgemeinen verschieden bei geändertem ε, sie wird jedoch, vorausgesetzt, daß $\lambda = 0$, für jedes ε gleich, wenn

$$\alpha^2 - k^2 m a_0^2 = 0,$$

d. h. wenn die Bedingung der „Resonanz“ erfüllt ist.

In diesem Falle wird

$$b_k = \frac{a_k}{k\alpha_0},$$

und weiter

$$k(\beta_k - \delta_k) = 90^0,$$

so daß das Gesetz des Ausschlages der Masse m gegeben ist durch:

$$x'' = \frac{R+\varepsilon V_m}{\alpha^2} + \frac{a_k}{k\alpha_0}\sin[k(\alpha_0 t + \beta_k) - 90^0]$$

$$= \text{Konstante} - \frac{a_k}{k\alpha_0}\cos k(\alpha_0 t + \beta_k)$$

Lagenbeziehung zwischen der Ebene SS' (Fig. 5) und dem Körper m.

Das Bewegungsgesetz der Ebene SS' war gegeben durch

$$V = V_m + A_k \cos k\alpha_0 t + B_k \sin k\alpha_0 t = V_m + a_k \sin k(\alpha_0 t + \beta_k),$$

so daß irgendein Punkt dieser Ebene nach der Zeit t von seiner Anfangslage eine Entfernung

$$\xi = \int_0^t V\, dt = V_m t + \left| -\frac{a_k}{k\alpha_0}\cos k(\alpha_0 t + \beta_k)\right|_{t=0}^{t=t} = \xi' + \xi''$$

hat. Hier ist der periodische Ausschlag ξ'' gegenüber einem sich gleichförmig von seiner Anfangslage entfernenden Punkt, für den $\xi=\xi'$, zu jeder Zeit genau so groß, wie das Pendeln der Masse m, gemessen durch den 2. Summanten von x'', gegen ihre Mittellage ($x''=0$).

Im Falle der Resonanz zeichnet also der Magnet (Fig. 5) das Pendeln der Ebene SS' nach Größe und Phase genau auf, vorausgesetzt, daß die Dämpfung $\lambda=0$ ist.

Einfluß von Schwingungen anderer Periode.

Würde sich nun $V=f(t)$ neben der einen Erregerwelle noch aus anderen Erregerwellen zusammensetzen, d. h., wären $A_1\ A_2 \ldots$ und $B_1\ B_2 \ldots$ nicht $=0$, so würden sich auch die dadurch erzwungenen Schwingungen über die erste lagern. Es werden aber zu einer Zeit, in der Resonanz mit der k'ten Welle

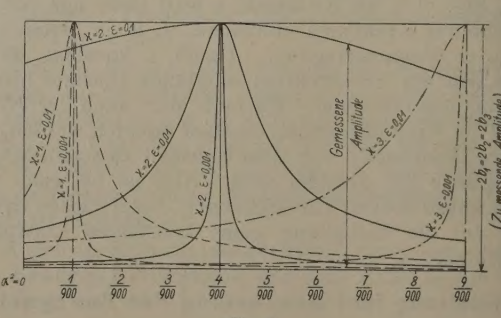


Fig. 6.

eintritt, die Amplituden dieser Schwingungen bedeutend kleiner sein als die zugehörige Pendelung der Ebene

SS', und zwar um so kleiner, je kleiner ε ist. Für praktische Messungen muß dann ε so klein gewählt werden, daß diese darübergelagerten Schwingungen von anderer Periode vernachlässigt, gegebenenfalls abgesondert werden können.

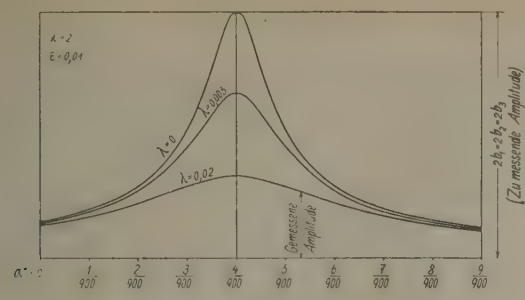


Fig. 7.

Es ist in Fig. 6 außer für $k=2$ auch für $k=1$ und $k=3$ die zu dem entsprechenden α^2 gehörige Amplitude, und zwar für $\varepsilon=0{,}01$ und $\varepsilon=0{,}001$ eingezeichnet. Dabei seien die Koeffizienten b in allen drei Fällen gleich, so daß bei Resonanz die gleichen Amplituden erscheinen.

Einfluß der Dämpfung λ.

Bisher war angenommen, daß die Dämpfung λ gleich 0 sei, was sich praktisch schwer verwirklichen läßt. Wird also $\lambda > 0$, so werden die in Fig. 6 gezeichneten Amplituden nicht ganz erreicht werden. In Fig. 7 sind für $k=2$ und $\varepsilon=0{,}01$ die zugehörigen Amplitudenwerte gezeichnet, und zwar für $\lambda=0$, $\lambda=0{,}005$ und $\lambda=0{,}02$. Die gemessene größte Amplitude x''_{max} gibt somit einen zu kleinen Wert für die zu messende Größe ξ''. Es ist also bei einer konstruktiven Verwirklichung der Rechnungsidee dahin zu streben, das Genauigkeitsverhältnis

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\lambda}$$

möglichst $=1$ zu machen. Eine weitgehende Vergrößerung von ε ist nicht statthaft, da dann die Amplituden der erzwungenen Schwingungen von anderer Periode zu groß werden. Es ist also vor allem der Eigenwiderstand des Apparates, λ, möglichst klein zu machen.

C. Konstruktion des Resonanz-Undographen.

Die angestellte Rechnung war nunmehr praktisch zu verwirklichen und der dort zugrunde gelegte Vorgang möglichst frei von anderen Einflüssen darzustellen. Es wurden im wesentlichen 3 Modelle des Resonanz-Undographen entworfen.

Modell I diente dazu, die Richtigkeit der Rechnung und den Einfluß der einzelnen Rechnungsgrößen zu prüfen (Fig. 8—12).

Modell II sollte bereits praktisch verwendbar sein, aber in allen seinen Teilen eine möglichste Anpassungsfähigkeit an unerwartete Erscheinungen erhalten, natürlich auf Kosten der Handlichkeit und Einfachheit (Fig. 19—26).

Modell III soll einen Versuch vorstellen, einen in der Praxis verwendbaren Apparat zu bauen. Handlichkeit, Einfachheit und Schnelligkeit in der Bedienung und nicht an letzter Stelle Billigkeit der Herstellung waren für diese Konstruktion maßgebend (Fig. 13—18).

Bei allen drei Modellen kehren in der Hauptsache dieselben Konstruktionsteile wieder, nämlich:

1. Eine elektromagnetische Wirbelstrombremse mit pedelndem Feldmagneten.
2. Eine Rückstellvorrichtung, so gestaltet, daß die Eigenschwingung des Feldmagneten beliebig eingestellt werden kann.
3. Eine Vorrichtung zum Aufschreiben der Schwingungsamplituden.
4. Eine Vorrichtung zum Aufschreiben der Phase.
5. Eine Antriebsvorrichtung.

1. *Die Wirbelstrombremse.*

Ihre Bedeutung in der Rechnung.

Bisher hatten wir nur eine geradlinige Bewegung ins Auge gefaßt. Dieselben Betrachtungen gelten aber auch für eine Drehbewegung.

Denken wir uns als den mit der Geschwindigkeit $V=f(t)$ sich bewegenden Punkt L der Ebene SS' (Fig. 5) einen Punkt (L in Fig. 8 u. 9), welcher an einer mit der Winkelgeschwindigkeit $v=\dot{\psi}(t)$ sich drehenden Scheibe SS', in der Entfernung r von der Achse sich befindet. Dieser Punkt L, wie auch alle im Abstand r von der Wellenachse befindlichen Teilchen der Scheibe SS' werden während einer Periode, d. h. während eines Arbeitsvorganges der antreibenden Kraftmaschine, eine von der Zeit abhängige Verschiebung ξ'' gegenüber einem Punkt erfahren, der an einer mit der mittleren Umfangsgeschwindigkeit

$$V_m=\pi v_m=r\frac{n\pi}{30}$$

gleichmäßig rotierend gedachten Scheibe im Abstand r von der Achse sich befindet. Dabei ist n die Tourenzahl in der Minute; ξ'' ist zu messen als Bogenlänge auf dem Kreis vom Halbmesser r in mm. Diese Verschiebung ξ'' kann nach dem früheren aufgefaßt werden als eine Uebereinanderlagerung verschiedener Winkelabweichungsschwingungen. Ein solche Schwingung war dargestellt durch

$$\xi''_k=\frac{a_k}{k\alpha_0}\cos k(\alpha_0 t+\beta_k).$$

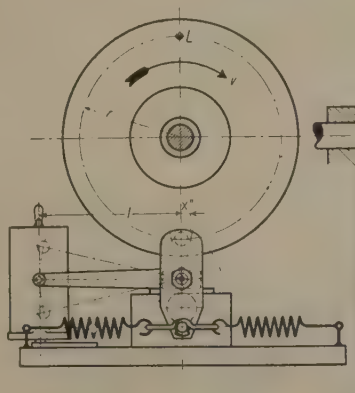


Fig. 8.

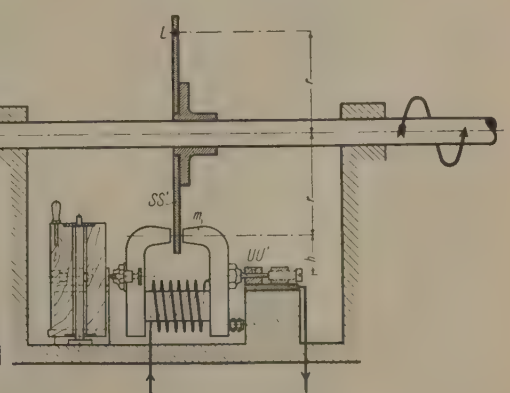


Fig. 9.

Dabei bestimmt sich α_0 aus der Dauer T einer Kraftzuführungsperiode der Maschine, da sich dann die Schwingung von längster Dauer, $\cos 1(\alpha_0 t+\beta_1)$, gerade einmal abgespielt hat: $\cos(0+\beta_1)=\cos(\alpha_0 T+\beta_1)=\cos(2\pi+\beta_1)$, woraus $\alpha_0 T=2\pi$.

Es wird bei Viertaktverbrennungsmaschinen:

$$T=\frac{4\pi}{v_m} \quad \text{und} \quad \alpha_0=\frac{v_m}{2}=\frac{n\pi}{60}$$

bei Dampfmaschinen und Zweitaktverbrennungsmaschinen: $T=\frac{2\pi}{v_m}$ und $\alpha_0=\frac{v_m}{1}=\frac{n\pi}{30}$.

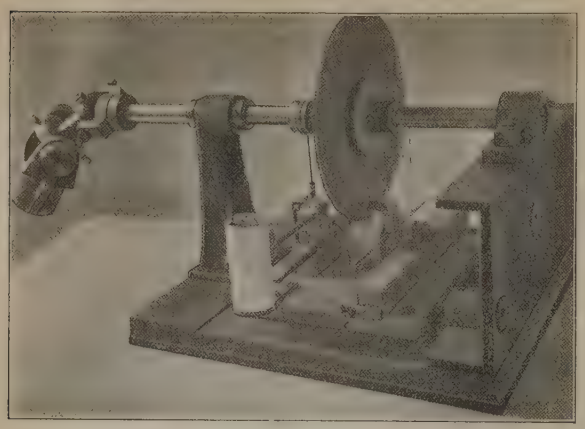


Fig. 10.

Besteht der von allen Punkten im Abstand r gebildete Kreisring, den man sich auch zu einer auf der Maschinenwelle aufgekeilten Scheibe erweitert denken kann, aus einem metallischen Leiter, z. B. Kupfer oder Eisen, so werden die in ihm entstehenden Wirbelströme auf den Magneten eine im Abstande h von der Schwingungsachse wirkende, mitnehmende Kraft ausüben, sofern die

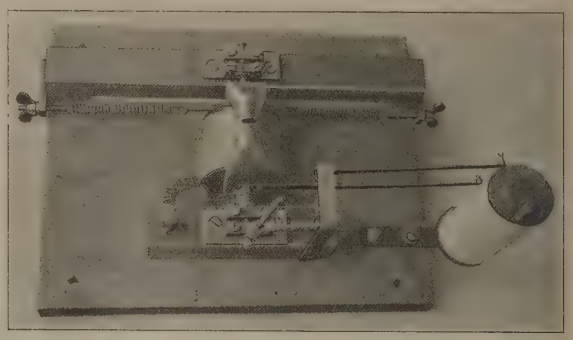


Fig. 11.

Den vom Punkte L beschriebenen Kreisring lassen wir nun den von einem Magneten hervorgerufenen Kraftlinienstrom durchschneiden. Die Ausbildung des Magneten bei Modell I deuten die Figuren 8 u. 9 an.

Ausdehnung des Kraftlinienfeldes gegenüber r vernachlässigt werden darf. Reduzieren wir auf den Hebelarm h auch noch die Masse m des Magneten und die in

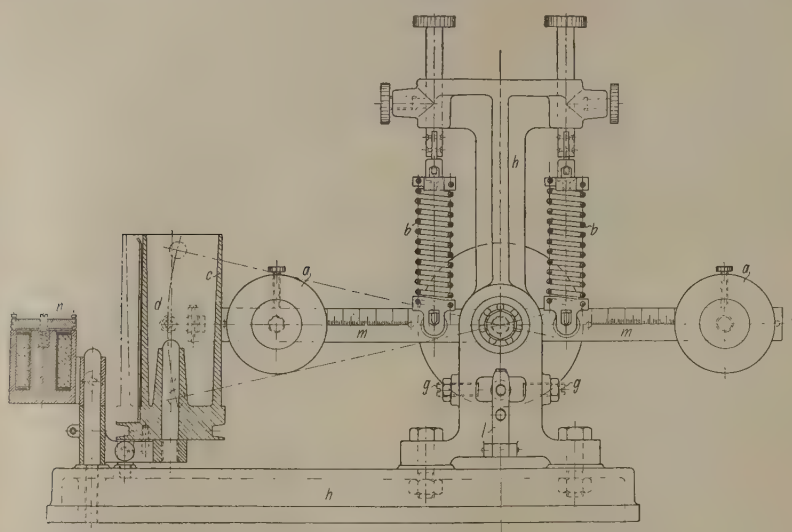


Fig. 13.

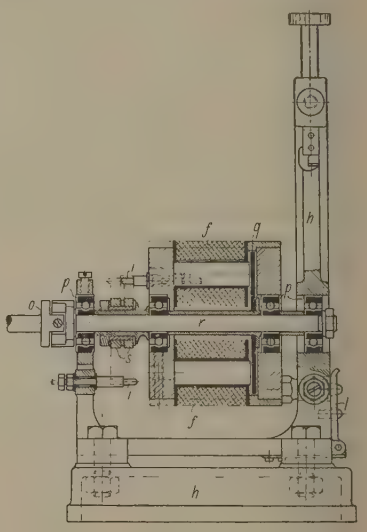


Fig. 14.

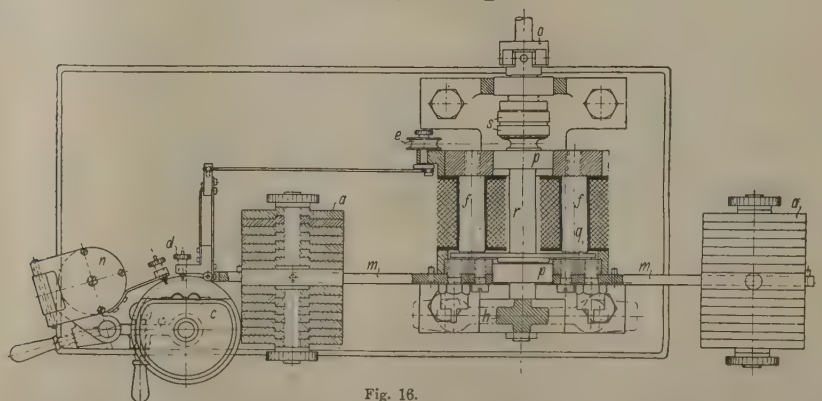


Fig. 16.

Fig. 13—18.

a Laufgewichte, *b* Rückstellfedern, *c* Papiertrommel, *d* Schreibstift, *e* Rolle (zum Antrieb der Zitterbewegung des Schreibstiftes), *f* Elektromagnet, *g* Hubbegrenzer, *h* Gestell, *i* Befestigungsstift für eine Kohlenbürste, *k* Kohlenbürste, *l* Arretiervorrichtung, *m* Arm mit Maßstab für die Laufgewichte, *n* Zeitschreiber, *o* Kupplung (Hooke'sches Gelenk), *p* Kugellager, *q* Bremskupferscheibe, *r* Hauptwelle des Resonanz-Undographen, *s* Schleifringe, *t* Magnetrad, *u* Anlegevorrichtung.

Die zur Unterstützung des Magneten dienende Ebene (Fig. 4 u. 5) UU' denke man sich aufgerollt, so daß sie die beiden Schwingzapfen des Magneten umhüllt.

der Hauptsache von Federn hervorgerufenen Rückstellkräfte, so gelten die früheren Rechnungsansätze. Es ist als reduzierte Masse einzusetzen: $m=\frac{\Theta}{h^2}$.

wo Θ das Trägheitsmoment, bezogen auf die Schwingungsachse ist.

Ein Fehler, der aber bei kleinen Schwingungen unbedeutend bleibt, entsteht bei Modell I dadurch, daß der Abstand des Kraftlinienstrom mittels von der Maschinen-

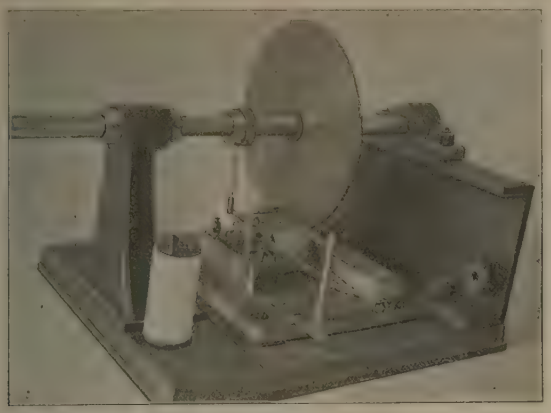


Fig. 12.

welle nicht gleich bleibt. Dieser Fehler ist bei Modell II u. III dadurch vermieden, daß die Schwingungsachse des Magneten mit der Antriebswelle zusammengelegt ist ($r = h$).

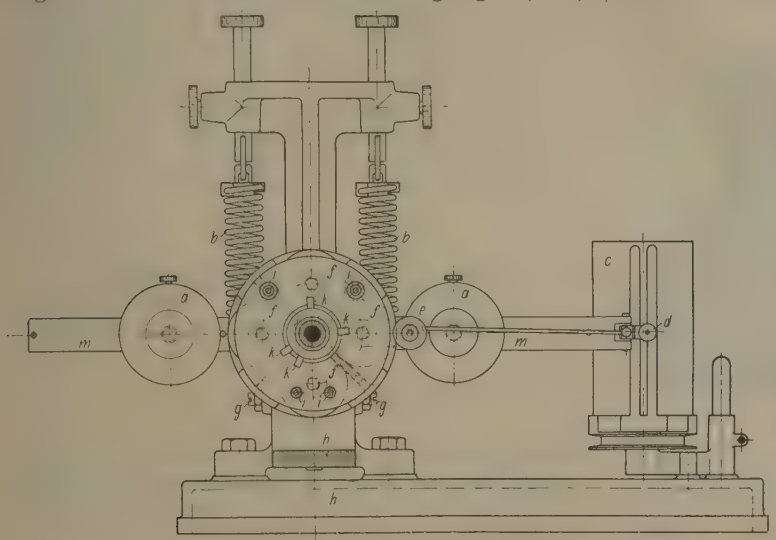


Fig. 15.

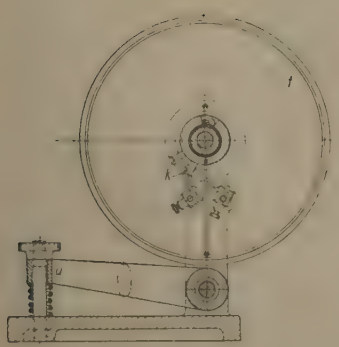


Fig. 17.

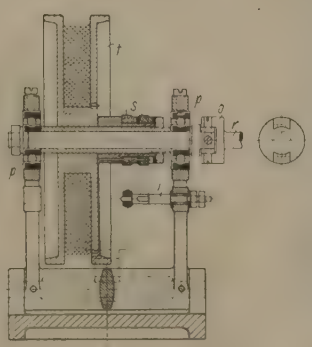


Fig. 18.

Die Lagerung des Schwingmagneten.

Bei der Lagerung des Schwingmagneten war Rücksicht auf möglichstgeringe Dämpfung durch Reibung zu nehmen. Anfangs waren die Schwingzapfen zwar schon so dünn wie möglich (1,2 mm) gemacht worden, aber gerade deshalb klemmten sie sich in ihren ziemlich langen Lagern (Fig. 27). Nachdem eine Verkürzung der Auflagerfläche (Fig. 28) ohne genügenden Erfolg

Fig. 19.

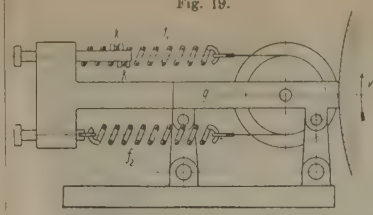
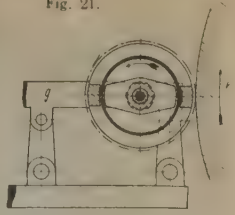


Fig. 21.



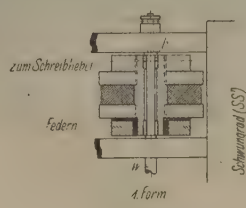


Fig. 20.

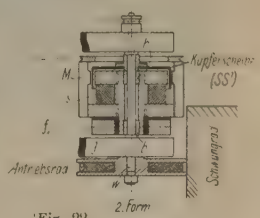


Fig. 22.

versucht worden war, beseitigte ich den Einfluß der Zapfenreibung auf die Schwingungsvorgänge vollständig durch Einführung der in Fig. 29 dargestellten, im Rechnungsansatz bereits berücksichtigten Drehlager.

Bei Modell II und III wird dieses Drehlager durch die mit der Geschwindigkeit $v = \psi(t)$ sich drehende Welle der Wirbelstrombremse selbst gebildet. Diese Anordnung macht die folgende Ueberlegung nötig.

Einfluß der Aenderung des Reibungskoeffizienten f.

Der Reibungskoeffizient f wird nicht, wie in unserem Rechnungsansatz angenommen, bei veränderlicher Geschwindigkeit konstant bleiben. Versuche haben gezeigt, daß die Lagerreibung und damit also die Reibungskraft R ungefähr das in Fig. 30 angedeutete Gesetz befolgt. Aendert sich die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der Unterlage UU' (in Fig. 4 u. 5) um $\Delta\mathfrak{v}$, so ändert sich auch die mitnehmende Reibungskraft R um ΔR. Der Einfluß dieser Aenderung der Reibungskraft kann für kleine Aenderungen der Geschwindigkeit v auch in unserer Hauptgleichung (S. 531) berücksichtigt werden.

Die Reibungskraft läßt sich dann darstellen durch

$$R = R_0 - \rho\left(\mathfrak{v} - \frac{dx}{dt}\right)$$

so daß die allgemeine Bewegungsgleichung übergeht in

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + (\varepsilon + \lambda)\frac{dx}{dt} + \alpha^2 x \left\{R_0 - \rho\left(\mathfrak{v} - \frac{dx}{dt}\right)\right\} + \varepsilon V$$

oder

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + (\varepsilon + \lambda - \rho)\frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = R_0 - \rho\mathfrak{v} + \varepsilon f(t)$$

Dabei stellt R_0 eine konstante Kraft n, ρ einen von der Größe der mittleren Relativgeschwindigkeit $\left(v-\frac{dx}{dt}\right)$ bestimmten konstanten Faktor vor. -

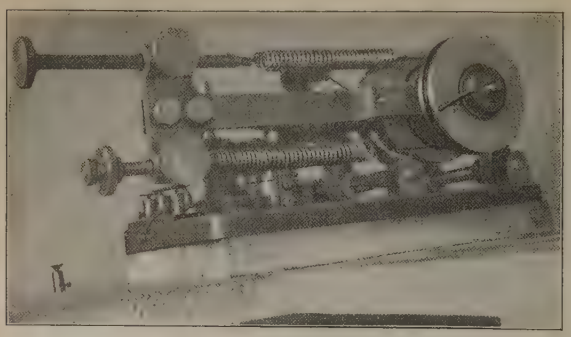


Fig. 23.

Bei der gewählten konstruktiven Ausführung war stets

$$v = V = f(t), \text{ somit}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + (\varepsilon - \rho + \lambda)\frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = R_0 + (\varepsilon - \rho) f(t)$$

das heißt, wäre die Kraft der Wirbelstrombremse nicht

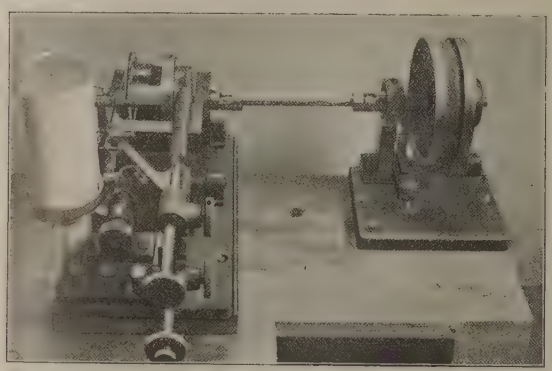


Fig. 24.

vorhanden ($\varepsilon = 0$), so könnten im Resonanzfalle (wenn $\alpha^2 - k^2 m\alpha_0^2 = 0$), durch die Reibung stetig wachsende, nur durch die eigene Dämpfung des Apparates (λ)

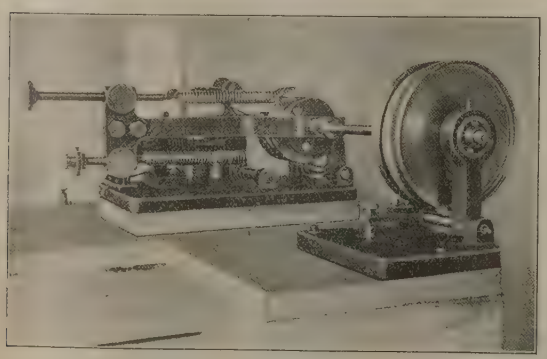


Fig. 25.

oder durch das Umspringen der Reibungskraft bei der Geschwindigkeit o begrenzte Schwingungen erregt werden. Bei dem Resonanz-Undographen wird der Einfluß von ρ durch die Erregung der Wirbelstrombremse kompensiert und erst die bei stärkerer Erregung überschüssige Kraft

$$\left[\Pi = \varepsilon\left(V - \frac{dx}{dt}\right)\right]$$

dient zur Einleitung der errechneten Resonanzschwingungen.

Wäre die Richtung von v entgegengesetzt der von V gewählt worden, so würde die mitnehmende Kraft Π um $\rho f(t)$ verstärkt.

Form des Magneten und der Bremsscheibe.

Bei Modell I war dem Magneten eine für die Erzeugung eines möglichst konzentrierten Kraftlinienfeldes günstige Form gegeben, die rotierende Scheibe war aus Kupfer, der Luftspalt auch bei etwaigem Schlagender Scheibe im ganzen konstant.

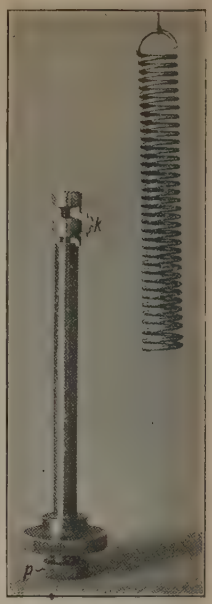


Fig 26.

Bei Modell II war ursprünglich die in Fig. 20 dargestellte Rotationsform für den Magneten gewählt worden. Bei den hier zu messenden sehr kleinen Winkelabweichungen gedachte ich nämlich r dadurch zu vergrößern, daß die Wirbelströme am Umfange des Maschinenschwungrades erzeugt werden sollten. Der erwartete Effekt, ein Mitnehmen des Magneten bei Drehung des Schwungrades blieb aus, als ungemein kräftig erwies sich jedoch die magnetische Anziehung. Diese

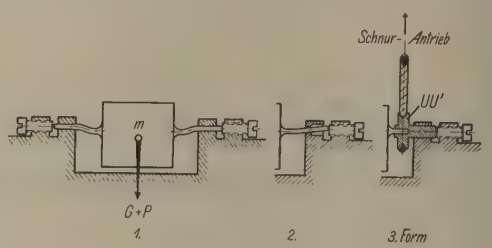


Fig. 27. Fig 28. 2. Fig. 29. 3. Form

Anziehung ermöglicht es, eine sehr brauchbare, bis zu den höchsten Tourenzahlen ruhig laufende Reibungsräder-Uebersetzung herzustellen, bei der ein Druck auf die Lager wie beim Riementrieb oder gewöhnlichen

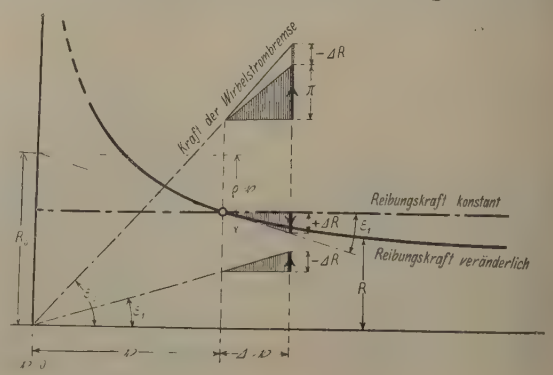


Fig. 30.

Reibungsrädern vermieden ist. Eine solche magnetische Reibungsräderübersetzung ist weiter unten beschrieben. Den umgebauten Magneten des Modells II zeigt noch Fig. 21 u. 22. Hier umschließt die Wicklung die Bremsscheibenwelle, weshalb falls Strom fließt, die Lager un-

zulässig heiß werden. Bei Modell III ist dies vermieden, auch konnte hier wieder die einfache Scheibenform Verwendung finden.

Stromzuführung.

Bei Modell II wurde der Erregerstrom für die Spirale s des Magneten M durch die zur Verleihung einer gewissen Eigenschwingung an dem Magneten M angebrachten Federn f_1 und f_2 (Fig. 19) zugeleitet und sollte durch die im Magneten festsitzenden Lagerbüchsen b zur Welle w und von dieser zum Gestell g zurückgeleitet werden. Bei den angewendeten hohen Tourenzahlen (2000—4000 i. d. Min.) scheint aber nach einiger Zeit das Schmieröl den Kontakt zwischen Welle und Lagern zeitweilig zu unterbrechen, wodurch jede Messung unmöglich wird. Eine den Magneten M mit dem Gestell g verbindende Spirale aus dünnem Kupferdraht half diesem Mißstand provisorisch ab.

Bei Modell III (Fig. 14 u. 15) erfolgt Zu- und Abführung durch solide Kohlenbürsten k, und zwar zur Vermeidung jeder Dämpfung durch Reibung unter Vermittlung eines Schleifringes s auf der sich drehenden Hauptwelle.

2. Bestimmung der Eigenschwingungszeit.

Ihre Bedeutung in der Rechnung.

In der Rechnung war angenommen, daß die schwingende Masse m, in Wirklichkeit also der Magnet der Wirbelstrombremse durch eine Kraft $F = \alpha^2 x$ in seine Mittellage zurückgedrückt werde. Diese Kraft wird durch Federn hervorgerufen, deren Anbringung die Zeichnungen auf Fig. 8, 19, 13 u. 15 zeigen. Nun muß aber

$$\alpha^2 - k^2 m \alpha_0^2 = 0$$

werden, d. h. die sogenannte Eigenschwingungszeit muß so einstellbar sein, daß sie mit der Periode der zu messenden Schwingung übereinstimmt, was durch

Aenderung der Federwindungen (α_0^2) oder des Trägheitsmomentes (m)

geschehen kann. Bei Modell I war eine Aenderung des Trägheitsmomentes Θ und damit auch von m durch radial verschiebbare Zusatzgewichte vorgesehen, aber nicht benutzt worden.

Bei Modell II wurde α_0^2 dadurch geändert, daß ein Teil der Federwindungen unwirksam gemacht werden konnte. (Vgl. Fig. 19 u. 16.) Zu diesem Zwecke war die Feder f_1 (Fig. 19) nicht wie f_2 mit ihrem hinteren Ende fest am Gestell g befestigt, sondern die auch in Fig. 26 ersichtlichen Klauen k nahmen den Federzug auf. Alle links von k liegenden Federwindungen waren spannungslos. Am laufenden Resonanz-Undograph wurden nun die Klauen k so weit in die Feder hineingeschraubt, d. h. die wirksame Federwindungszahl wurde so lange geändert, bis die gewünschte Resonanz festgestellt war, ein etwas umständliches und unsicheres Verfahren. Deshalb ist bei Modell III wieder auf die Aenderung von m zurückgegriffen worden: Zwei Laufgewichte können radial verschoben werden. Um Resonanz mit der gegebenen Tourenzahl herzustellen, werden jene mit Hilfe einer am Arm befindlichen Einteilung auf eine auf dem Versuchsstande festgelegte Stellung gebracht und brauchen dann nicht mehr verschoben werden. Beide Gewichte bestehen aus einzelnen Scheiben. Um nun die konstant wirkende Kraft $(R + s \cdot f(t)$ der Bremse nicht voll auf die schwachen Federn wirken zu lassen, kann man durch einseitiges Anbringen der Gewichtsscheiben das Moment dieser Kraft ausgleichen, ohne das Trägheitsmoment und damit die Eigenschwingungszeit zu ändern. Die Windungszahl und damit die Konstante der Federn liegt ein für allemal fest, die Federn sind geaicht und so gegeneinander abgestimmt, daß beim Uebergang von einer Schwingung zu einer von anderer Periode nur das Auswechseln der entsprechenden Federn nötig wird. Dies erfordert nur wenige Sekunden.

3. Die Amplituden-Schreibvorrichtung.

Zur graphischen Aufzeichnung der Schwingungsamplituden war bei allen drei Modellen eine Papiertrommel und ein mit dem schwingenden Magneten verbundener Schreibhebel angebracht, nur daß bei Modell II eine durch auswechselbare Scheiben veränderliche Uebersetzung möglich ist, eine Einrichtung, die sich als überflüssig und ungenau herausstellte. Deshalb ist sie bei Mod. III wieder aufgegeben.

Die Trommel.

Würde der Schreibstift, der die hervorgerufenen Resonanzschwingungen aufzeichnen soll, stets auf der

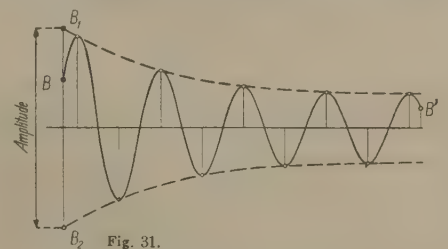


Fig. 31.

Trommel, welche ähnlich wie bei einem Indikator angebracht ist (Fig. 8 u. 9) schleifen, so würde er die Schwingungen zu stark dämpfen. Deshalb hat die Trommel eine unrunde Form (Fig. 32). In der Trommelruhelage schwingt der Stift frei. Haben sich die Resonanzschwingungen ausgebildet, so dreht man die Trommel einmal herum, wodurch der Stift von B bis B' eine Kurve aufzeichnet.

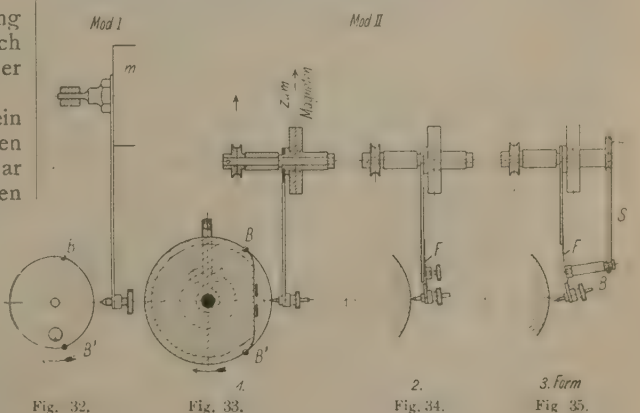


Fig. 32. Fig. 33. 1. Fig. 34. 2. Fig. 35. 3. Form

Die Kurve zeigt bei konstanter Trommelgeschwindigkeit das Bild einer gedämpften Schwingung, ähnlich wie man es bei der Untersuchung der Eigenschwingung der Indikatoren findet (Fig. 31). Konstruiert man in Fig. 31 die Kurven der maximalen Ausschläge, so gilt zwar für diese Kurven nicht das Gesetz des „logarith-

mischen Dekrementes", da bei einem Kleinwerden der Schwingungen sofort wieder der Einfluß von ε sich bemerkbar macht, wohl aber verlaufen diese Kurven sehr stetig und geben in jeder Stellung an, wie weit der Schreibstift ausschwingen würde, wenn die dämpfende Reibung plötzlich wegfallen würde. Nun wissen wir, daß im Punkte B (Fig. 31 u. 33) diese Reibung plötzlich einsetzte. Aus der Entfernung $B_1 B_2$ im Punkte B, können wir also entnehmen, mit welcher Amplitude vorher die Schwingung vor sich gegangen ist.

Bei Modell I wird das Papier aufgeklebt, die Trommel durch einen Handgriff gedreht.

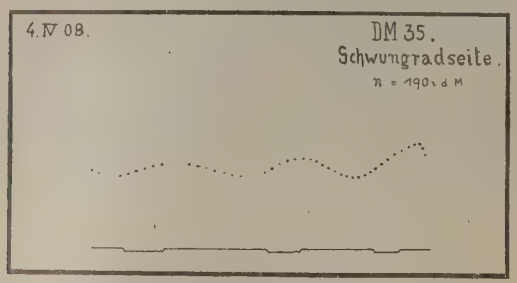


Fig. 36. Original-Diagramm.

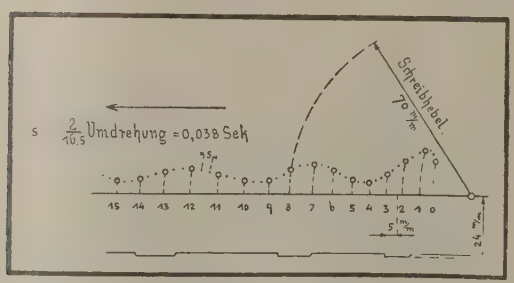


Fig. 37. Korrekturangaben.

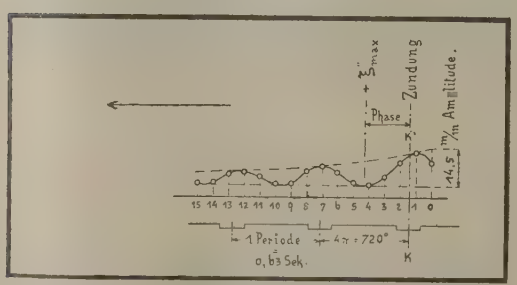


Fig. 38. Umgezeichnetes Diagramm.

Bei Modell II u. III wird die Papieraufspannung durch zwei Blattfedern wie bei den Indikatoren, die Trommeldrehung durch einen Abzugsfaden bewirkt. Ein Anschlagstift gestattet nur eine Umdrehung.

Der Schreibhebel.

Der Schreibhebel erforderte einige Aenderungen. (Vgl. Fig. 32—35). Er war zuerst fast starr. Dadurch blieb der Schreibstift entweder am Papier hängen oder kam überhaupt nicht damit in Berührung: Eine eingeschaltete Blattfeder (F in Fig. 34) gestattete, rasche Schwingungen ohne zu große Dämpfung aufzuschreiben. Aber bei langsamen Schwingungen, wo die in den Federn des schwingenden Magneten aufgespeicherte Energie gering ist, wurde eine aperiodische, zur Messung der Amplitude unbrauchbare Kurve aufgezeichnet. Es gelang, die Dämpfung dadurch zu vermindern, daß dem Schreibstift eine Bewegung quer zur Schwingungsebene erteilt wurde und er nur momentan mit dem Papier in Berührung trat. Diese Bewegung wurde durch ein kleines von der Apparatwelle aus angetriebenes Exzenter (E in Fig. 35) eingeleitet. An der Feder F war ein Stift B starr befestigt, dessen Ende von der Exzenterstange S hin- und hergezogen wurde. Dabei wurde die Feder abgebogen und ihr Ende, das den Schreibstift trug, in Querschwingung versetzt. Die so aufgezeichnete Schwingungskurve setzt sich aus lauter einzelnen Punkten zusammen, wie ein in Fig. 36 dargestelltes Originaldiagramm zeigt. Die Schreibvorrichtung des Modells III ist nach demselben Prinzip eingerichtet, durch Auswechseln einer Scheibe (e in Fig. 15) hat man es in der Hand, die Anzahl der Punkte pro Periode zu ändern.

Diagrammkorrektur.

Das Punktierungssystem gestattet auch bei ungleicher Trommelgeschwindigkeit eine solche Umzeichnung der Schwingungskurve, daß die Abszissen den Kurbelwinkel der Maschine und damit ziemlich genau die Zeit, die senkrechten Ordinaten die Winkelabweichungen darstellen. In Fig. 36—38 ist dies für ein bei der später beschriebenen Untersuchung eines 35 PS.-Dieselmotors gewonnenes Originaldiagramm des Modells II unter Berücksichtigung der Schreibhebellänge von 70 mm durchgeführt. Wir haben hier 16,5 Zwischenräume zweier Punkte s pro 1 Periode = 2 Umdrehungen. Somit entspricht:

$$s = \frac{2 \cdot 360^0}{16{,}5} = 43{,}5^0$$

Kurbelwinkel und bei $n = 190$ i. d. Min.

$s = 0{,}038$ Sek.

4. *Der Zeitschreiber.*

Zur Bestimmung der Phase der aufgezeichneten Schwingung war bei Modell I ein von einem Exzenter angetriebener Schreibhebel benutzt worden. (Vgl. Fig. 10—12).

Bei Modell II und III wurde zum Antrieb dieses Schreibhebels ein Elektromagnet benutzt, eine bekannte Vorrichtung. Der dazu nötige Strom muß durch einen von der zu untersuchenden Maschine betätigten Kontakt geschlossen werden. Die konstruktive Ausführung zeigt Fig. 13 u. 16.

5. *Der Antrieb.*

Bei Modell I war die Bremsscheibe auf der zu untersuchenden Welle selbst aufgebracht. (Fig. 9.) Bei Modell II wurden nach dem Umbau des Magneten zuerst Versuche mit Bandantrieb gemacht, die aber nicht befriedigten. (Vgl. später unter „Prüfung".) Deshalb wurde zu dem in Fig. 22 dargestellten Magnetradantrieb übergegangen. Dieses Rad sollte direkt auf dem Maschinenschwungrad laufen. Um dem Schlagen desselben folgen zu können, war der ganze Apparat auf drehbaren Stelzen gelagert. Da aber der Schwingmagnet mit Schreibvorrichtung nicht vollständig ausbalanciert war, zeigte es sich, daß die Messung durch die Bewegung des Gestelles gefälscht wurde. Deshalb wurde das Antriebsrad allein nachgiebig gelagert, der Rahmen des Resonanz-Undographen selbst jedoch festgestellt. Die Kupplung bewirken zwei *Hooke*sche Gelenke. Toter Gang in dieser Kupplung schadet nichts, da die Bremsscheibe alles in einer Richtung in Spannung erhält. Schädlich wirkt jedoch etwaige elastische Verdrehung, die durch kräftige, starre Konstruktion der Kupplungen

und Wellen ferngehalten wurde. Das Magnetrad wurde zur Verstärkung des magnetischen Haftens mit breiteren Laufflächen ausgestattet. (Fig. 17 u. 18, 24 u. 25.)

D. Prüfung des Resonanz-Undographen.

1. *Prüfungsverfahren.*

Um irgend eine Methode zur Messung der Winkelabweichungen oder der Winkelgeschwindigkeiten auf ihre Zuverlässigkeit und Genauigkeit zu prüfen, ist es nötig, ein bereits bekanntes Bewegungsgesetz nachmessen zu lassen.

a) Gewichte oder Federn.

Ein mehrfach angewandtes Verfahren ist, durch Gewichte oder Federn einen künstlichen Ungleichförmigkeitsgrad zu erzeugen. Ein drehbares System vom Trägheitsmoment Θ hat am Radius r ein Uebergewicht mg (vergl. Fig. 39). Dann ist die Winkelbeschleunigung:

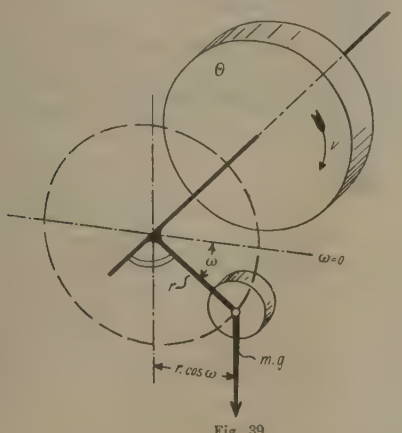


Fig. 39.

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{(mg)\, r \cos\omega}{\Theta}$$

wo ω der jeweilige Drehwinkel und t die Zeit.

Daraus (nach *Hütte*, 17. Aufl. S. 85):

$$t = \int \frac{d\omega}{\sqrt{C + 2\int \frac{mg \cdot r}{\Theta} \cdot \cos\omega \cdot d\omega}} + C_1$$

$$= \int \frac{d\omega}{\sqrt{C + \frac{2 \cdot mg \cdot r}{\Theta} \sin\omega}} + C_1$$

woraus

$$\frac{dt}{d\omega} = \frac{1}{\sqrt{C + \frac{2 \cdot mg \cdot r}{\Theta} \cdot \sin\omega}} = \frac{1}{v_\omega}$$

wo v_ω die zum Drehwinkel ω gehörige Winkelgeschwindigkeit. Für $\omega = 0$ oder $\omega = \pi$ wird $C = v^2$, wo v die mittlere Winkelgeschwindigkeit. Somit:

$$v_\omega = \sqrt{v^2 + \frac{2 \cdot mg \cdot r}{\Theta} \cdot \sin\omega}$$

und der sogenannte „Ungleichförmigkeitsgrad“:

$$\delta = \frac{\sqrt{v^2 + \frac{2\,mg \cdot r}{(\cdot)}} - \sqrt{v^2 - \frac{2\,mg \cdot r}{(\cdot)}}}{r}$$

Die beschriebene Prüfungseinrichtung verlangt die genaue, schwer zu gewinnende Kenntnis des Trägheitsmomentes Θ, auch ändert sich mit der Tourenzahl δ, dessen beliebige Aenderung schwierig ist.

b) *Hooke*sches Gelenk.

Herr Prof. *W. Lynen* (München) hat folgende einfache Anordnung getroffen, die vom Verfasser benutzt werden konnte:

Zwei durch ein „*Hooke*sches Gelenk“ verbundene Wellen sind unter einem Winkel γ gegeneinander geneigt (Fig. 40). Die eine Welle wird mit möglichst gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit v, z. B. durch einen Elektromotor angetrieben. Dann befolgt die Winkelgeschwindigkeit v_1 der anderen, getriebenen Welle das Gesetz:

$$v_1 = \frac{v \cos\gamma}{1 - \sin^2\gamma \sin^2\omega}$$

wo $\omega = vt$ den jeweiligen Drehwinkel bedeutet. Dabei ist $\omega = 0$, wenn die Querzapfenachse der getriebenen

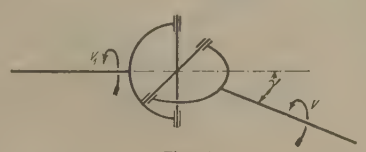


Fig. 40.

und abgelenkten Welle in der Ablenkungsebene steht. (Vergl. *Reuleaux*, „Der Konstrukteur“, 3. Aufl. S. 261).

Entwickelung in eine *Fourier*sche Reihe.

Dieses Bewegungsgesetz läßt sich als eine Uebereinanderlagerung einzelner harmonischer Schwingungen darstellen, d. h. durch eine *Fourier*sche Reihe, in der zudem alle mit einem Sinus versehenen Glieder verschwinden, da hier die Bedingung $f(-x) = f(x)$ erfüllt ist (vergl. wieder Dr. *R. Fricke*, „Kurzgefaßte Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik“).

Diese Darstellung des Bewegungsgesetzes gestattet etwa im Meßinstrument auftretende Resonanz- und Eigenschwingungserscheinungen nachzuweisen und nachzumessen. Es läßt sich umformen:

$$v_1 = \frac{v \cdot \cos\gamma}{1 - \sin^2\gamma \sin^2\omega} = \frac{v \cdot \cos\gamma}{1 - \frac{1}{2}\sin^2\gamma + \frac{1}{2}\sin^2\gamma \cos 2\omega}$$

$$\frac{v\,\frac{2\cos\gamma}{\sin^2\gamma}}{\left\{\frac{2}{\sin^2\gamma} - 1\right\} + \cos 2\omega} = \frac{v \cdot K}{L + \cos x} = f(x)$$

wo stets $L \gtrless 1$.

Es muß werden:

$$v_1 = v\,\frac{K}{L + \cos x} = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots$$

wo

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{v \cdot K \cdot \cos nx}{L + \cos x}\, dx.$$

Die Koeffizienten von $\sin x$, $\sin 2x$ usw. werden $= 0$. Die Auswertung der Integrale ergibt:

$$v_1 = v + 2v\,(K - L)\cos(2vt) + 2v\,(2L^2 - 2LK - 1)\cos(4vt) + \ldots$$

Die Winkelstellungen der abgelenkten Welle ergeben sich daraus zu:

$$\omega_1 = \int_{\omega=0}^{\omega=\omega} v_1\,dt = \int v\,dt + 2v(K-L)\int \cos(2vt)\,dt + 2v(2L^2-2LK-1)\int \cos(4vt)\,dt + \dots$$

$$= vt + 2v(K-L)\int \cos(2vt)\,\frac{d(2vt)}{2v} + 2v(2L^2-2KL-1)\int \cos(4vt)\,\frac{d(4vt)}{4v} + \dots$$

$$= \omega + (K-L)\sin 2\omega + \frac{1}{2}(2L^2-2KL-1)\sin 4\omega + \dots$$

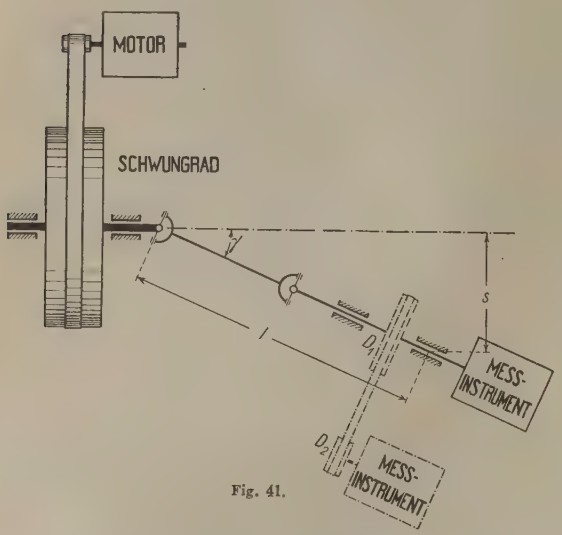


Fig. 41.

In der folgenden Tabelle findet man die ersten zwei Koeffizienten der Reihe für v_1 ausgewertet für Werte des Ablenkungswinkels γ von 0^0—45^0. Bis 45^0 konvergiert die Reihe sehr schnell, so daß bereits b_3 vernachlässigt werden kann.

Tabelle I.

Ablenkungswinkel γ	$b_1/v = 2(K-L)$	$b_2/v = 2(2L^2-2LK-1)$
5^0	0,005	0,000
10^0	0,015	0,000
15^0	0,035	0,001
20^0	0,062	0,002
25^0	0,098	0,005
30^0	0,144	0,010
35^0	0,200	0,020
40^0	0,270	0,036
45^0	0,350	0,060

Bemerkenswert ist bei Benutzung des *Hooke*schen Gelenkes, daß eine Schwingung von einer Periode = einer Umdrehung fehlt, dagegen die Schwingung von einer Periode = einer halben Umdrehung für nicht zu große Ablenkungswinkel weitaus alle höheren Schwingungen übertrifft.

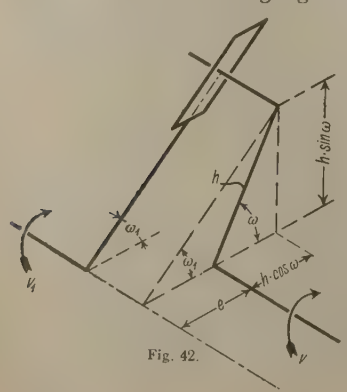


Fig. 42.

Anordnung eines Versuchsstandes.

Wollte man genaue Untersuchungen mit Hilfe des *Hooke*schen Gelenkes machen, so wäre vor allem darauf zu achten, v konstant zu halten und Klemmungen in dem Getriebe unmöglich zu machen. Dazu wäre etwa die in Fig. 41 angedeutete Anordnung zu wählen:

Ein möglichst schweres Schwungrad wird von einem leicht regelbaren, aber dann mit konstanter Tourenzahl laufenden Motor angetrieben. Da der Ablenkungswinkel γ leicht änderbar sein soll, läßt sich eine genaue Montage der mit v_1 rotierenden Welle ohne großen Zeitverlust nicht ausführen, wodurch Stöße und Klemmungen entstehen. Deshalb ist noch ein zweites *Hooke*sches Gelenk eingeschaltet, das aber nur die kleinen

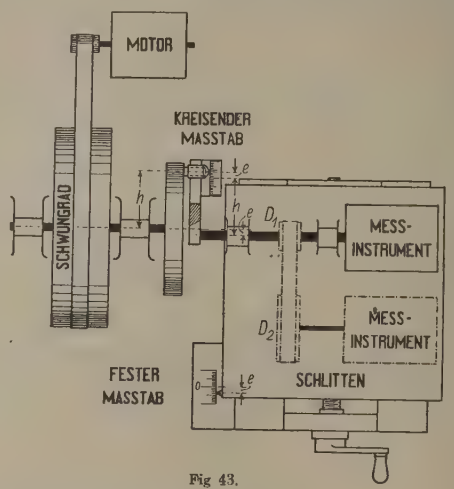


Fig. 43.

Montagefehler ausgleichen soll. Mit der mit v_1 rotierenden Welle ist dann das zu untersuchende Instrument entweder direkt oder durch einen möglichst unelastischen Trieb zu kuppeln.

c. Kurbelschleife.

Eine etwas einfachere Einstellung und Nachmessung des künstlichen Ungleichförmigkeitsgrades ermöglicht die Verwendung der „Kurbelschleife“:

Die Achse der ungleichförmig anzutreibenden Welle (v_1) kann parallel zur Antriebswelle (v) verschoben werden. (Abstand e in Fig. 42.). Ein im Abstand h von der Achse befindlicher Zapfen ragt in eine radiale Schlitzführung der getriebenen Welle und nimmt diese mit. Zwischen den jeweiligen Winkelstellungen der beiden Wellen besteht dann die Beziehung:

$$\operatorname{cotg}\omega_1 = \frac{e + h\cos\omega}{h\cdot\sin\omega} = \frac{e}{h}\cdot\frac{1}{\sin\omega} + \operatorname{cotg}\omega,$$

woraus

$$\omega_1 = \operatorname{arc\,cotg}\left[\frac{e}{h}\cdot\frac{1}{\sin\omega} + \operatorname{cotg}\omega\right].$$

Daraus folgt die Winkelgeschwindigkeit, wenn man noch setzt $\frac{e}{h} = p$ und $\omega = vt$, zu:

$$v_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\operatorname{arc\,cotg}\left[p\cdot\frac{1}{\sin vt} + \operatorname{cotg} vt\right]}{dt}$$

$$= \frac{-1}{1+\left(p\frac{1}{\sin vt} + \operatorname{cotg} vt\right)^2}\left\{p\frac{d\frac{1}{\sin vt}}{dt} + \frac{d\operatorname{cotg} vt}{dt}\right\}$$

$$= \frac{-1}{\frac{\sin^2 vt}{\sin^2 vt} + \frac{p^2}{\sin^2 vt} + \frac{2p\cos vt}{\sin vt\sin vt} + \frac{\cos^2 vt}{\sin^2 vt}}\left\{-\frac{p\cdot v\cos vt}{\sin^2 vt} - \frac{v}{\sin^2 vt}\right\}$$

$$= v \cdot \frac{p\cos vt + 1}{(\sin^2 vt + \cos^2 vt) + p^2 + 2p\cos vt}$$

$$= \frac{v}{2} \cdot \frac{\frac{1}{p} + \cos vt}{\frac{1+p^2}{2p} + \cos vt}$$

$$= \frac{v}{2} \cdot \frac{K + \cos x}{L + \cos x}$$

$= f(x)$, wo stets $p \leqq 1$ und $L \geqq 1$.

Entwicklung in eine *Fourier*sche Reihe.

Entwickelt man auch diese Funktion in eine *Fourier*sche Reihe, deren Koeffizienten gegeben sind durch

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{K + \cos x}{L + \cos x} \cos nx\, dx,$$

so ergibt die Auswertung der Integrale

$$v_1 = v - pv\cos vt + p^2 v \cos 2vt + \ldots$$

Die Koeffizienten von $\sin vt$, $\sin 2vt$ usw. verschwinden auch hier. Die Winkelstellungen der getriebenen Welle ergeben sich daraus zu:

$$\omega_1 = \int v\,dt - pv\int \cos vt\,dt + p^2 v \int \cos 2vt\,dt + \ldots$$

$$= vt \quad - p\sin vt \quad + \tfrac{1}{2}p^2 \sin 2vt \quad + \ldots$$

$$= \omega \quad - p\sin\omega \quad + \tfrac{1}{2}p^2 \sin 2\omega \quad + \ldots$$

Bemerkenswert ist bei Benutzung der Kurbelschleife, daß die Schwingung von einer Periode = einer Umdrehung bei kleinem Achsabstand weitaus alle höheren Schwingungen übertrifft.

stellten Modell I des Resonanz-Undographen Versuche mit dem *Hooke*schen Gelenk angestellt. Zum Antrieb diente ein regulierbarer Nebenschlußmotor, auf dessen Achse das *Hooke*sche Gelenk aufgesetzt war (Fig. 10). Diese direkte Kupplung erlaubte nicht, mit kleinen Tourenzahlen zu arbeiten, da dann eine nur halbwegs genaue Regulierung oder eine gleichförmige Drehung unmöglich wurde. Das Aufzeichnen langsamer Schwingungen war erst bei Versuchen an langsamlaufenden Kolbenmaschinen möglich.

Die Erregung des Magneten des Resonanz-Undographen erfolgte durch regulierbaren Akkumulatorenstrom.

Die Tourenzahl wurde durch ein Handtachometer, etwas unsicher zwar, gemessen.

Uebersetzungsverhältnis des Schreibzeuges.

Es war bei den Versuchen (vgl. Fig. 9):

$r = 110$ mm

$h = 30$ mm

die Schreibhebellänge $l = 180$ mm,

so daß

6 mm Amplitude auf dem Diagramm = 1 mm Winkelabweichung am Rad. 0,11 m

1 mm Amplitude auf dem Diagramm = 1,51 mm Winkelabweichung am Rad. 1,0 m.

Resultate.

Da es vorerst nur galt, die Richtigkeit der Rechnung und den Einfluß der einzelnen Größen festzustellen, so wurden die Versuche in der Weise durchgeführt, daß die Schreibhebelausschläge (B_1 B_2 in Fig. 31) bei ver-

Fig. 44. Versuch 1. Fig. 45. Versuch 2. Fig. 46. Versuch 3. Fig. 47. Versuch 4.

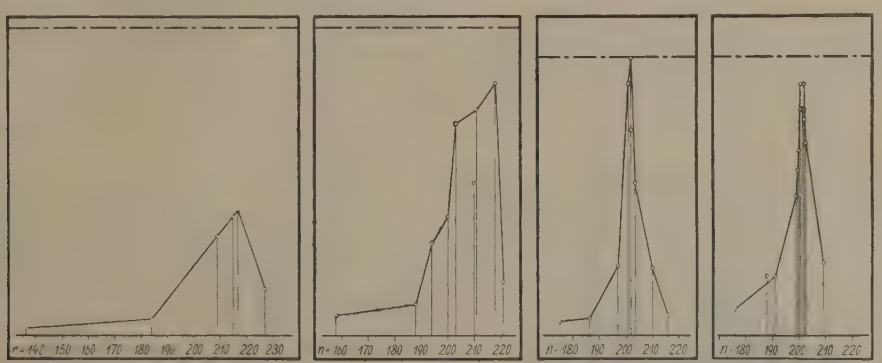


Fig. 44—47. Prüfung des Resonanz-Undographen, Modell I. Maßstab der Amplituden, gemessen am Schreibstift.

Anordnung eines Versuchstandes.

Einen Versuchstand, der das angegebene Gesetz benutzt, müßte man etwa wie in Fig. 43 angedeutet, anordnen. Die Lager der getriebenen Welle sind auf einem Schlitten nötigenfalls sogar während des Laufens, parallel verschiebbar. Maßstäbe am Schlitten oder an der radialen Schlitzführung lassen direkt die Achsenentfernung ablesen.

2. *Prüfung des Resonanz-Undographen, Modell I durch das Hookesche Gelenk.*

Versuchsanordnung.

Zur Prüfung der früher mitgeteilten rechnerischen Ueberlegungen wurden an dem in Fig. 8—12 dar-

schiedenen Tourenzahlen aufgezeichnet wurden, d. h. es wurde das α_0 der Rechnung geändert, die Rückstellfedern und das Trägheitsmoment (das α und m der Rechnung), und damit die Eigenschwingungszeit wurden unverändert gelassen.

Der Ablenkungswinkel γ wurde durch Messung der Kathete s (vergl. Fig. 41) für ein konstantes

$$l = 690 \text{ mm}$$

gefunden.

Die Resultate sind in Tabelle II und in den Fig. 44 bis 47 zusammengestellt. Hieraus geht auch der Einfluß der vorgenommenen konstruktiven Aenderungen deutlich hervor.

Eine größere Genauigkeit, als die Versuche vom 21 u. 22. Oktober ergaben, gewährleistete schon die ungenaue Versuchseinrichtung nicht.

Tabelle II.

Datum	12. Okt.	15. Okt.	17. Okt.	21. Okt.	22 Okt.	1907
Versuch No.	—	1	2	3	4	
s in mm	—	180	180	170	170	
γ^0	—	15,12	15,12	14,4	14,4	
Zu messende Amplitude am Schreibst. in mm	—	23,4	23,4	21,05	21,05	
Gemessene Amplitude am Schreibst. in mm	0	9,5	19,0	21,0	19,0	
Fehler der Messung	— 100%	— 59%	— 19%	— 0%	— 9%	
Bemerkung	Lange Zapfenlager mit Klemmung (Fig. 27)	Kurze Zapfenlager mit Reibung (Fig. 28)	Drehlager, jedoch Antrieb noch zuckend (Fig. 29) Luftwiderstand verringert	Drehlager stetig angetrieben. Federnzapfen in Schneidenform (Fig. 29)	ebenso	

$$\gamma = arc \sin \frac{s}{l}, \text{ wo } l = 690 \text{ mm}$$

Zu messende Amplitude am Rad 1 m $= 2\,(K-L)$

„ „ „ am Schreibzeug $= \frac{2}{1{,}51}(K-L)$.

Tabelle III.

Datum	19. Jan.	19. Jan.	20. Jan.	23. Jan.	26. Jan.	1908.
Versuch No.	1	2	3	4	5	
e in mm (Fig. 43)	2,3	7,6	4,75	5,75	2,25	
p	0,0307	0,101	0,0634	0,0767	0,030	
Zu messende Amplitude am Schreibstift in mm	14,4	47,5	29,8	37,3	14,6	
Gemessene größte Amplitude in mm	12,5	31,0	25,0	35,0	16,5	
Fehler der Messung	— 13%	— 35%	— 16%	— 6%	+13%	
Antriebsart.	Band	Band	Band	Magnetrad	Magnetrad	

$$p = \frac{e}{h}, \text{ wo stets } h = 75 \text{ mm}$$

Zu messende Amplitude am Rad 1 m $= 2p$

„ „ „ am Schreibstift $= 2p \cdot 0{,}235$ bzw. $= 2p \cdot 0{,}2435$.

3. *Prüfung des Resonanz-Undographen, Modell II durch die Kurbelschleife.*

Versuchsanordnung.

Das auf Grund der Versuche mit Modell I neu konstruierte Modell II (vgl. Abschnitt *C*) wurde durch die Anordnung mit der Kurbelschleife geprüft.

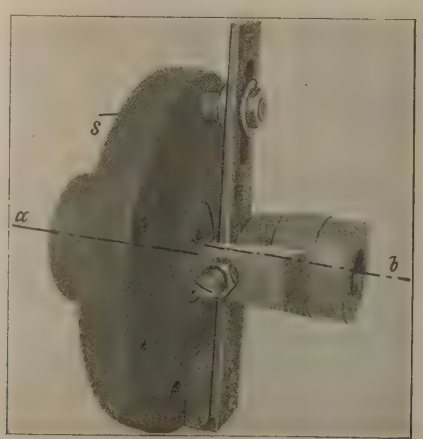


Fig. 48 *a* treibende Welle, *b* getriebene Welle.

Auf die Achse eines regulierbaren Nebenschluß-elektromotors war die Scheibe *S* (Fig. 48) aufgekeilt, die einen Zapfen am Radius $h = 75$ mm trug. Eine zur Achse des Motors parallele Welle (*b*) wurde von diesem Zapfen aus durch einen radial angebrachten Schlitz eines auf der Welle *a* befestigten Armes angetrieben. Ein Maßstab an diesem Arme gestattete, die maximale Verschiebung des Zapfens in dem Schlitz und damit den doppelten Abstand *e* der beiden parallelen Wellen abzulesen (*e* in Fig. 42).

Von einer auf der getriebenen Welle *b* sitzenden Riemenscheibe von 134 mm ⌀ wurde der zu prüfende Apparat teils durch ein Band, teils durch ein „Magnetrad" angetrieben.

Ein Tachometer diente dazu, die Gleichheit der Tourenzahl zu überwachen. Bei den benutzten kleinen Tourenzahlen war dies jedoch nur annähernd möglich, neben der wechselnden Magneterregung ein Grund, daß die Gesetzmäßigkeit der Versuchsresultate nicht vollständig rein zum Ausdruck kam.

Ein kleines Exzenter auf der Welle *b* schloß einmal pro Umdrehung bei Berührung mit einer Kontaktfeder einer Stromkreis, in den die Spule des Zeitschreibers geschaltet war.

Uebersetzungsverhältnis des Schreibzeuges.

Es war bei den Versuchen:

Der Durchmesser der Scheibe [D_1 in Fig. 43] auf der Antriebswelle . . . . . = 134 mm

Die auf die Hauptwelle der R.-U. reduzierte[2]) Schreibhebellänge l . . . = 143,5 „

Der Durchmesser der Holzrolle [D_2 in Fig. 43] auf der R.-U.-Welle bei Bandantrieb . = 82 „

Der Durchmesser des „Magnetrades" . . = 79 „

[2]) Bei R.-U. Modell II war der Schreibhebel nicht direkt an dem schwingenden Magneten angebracht, sondern noch eine vergrößernde Uebersetzung ($\frac{7}{2}\frac{0}{0}$) dazwischen geschaltet. Deshalb ist die wirkliche Schreibhebellänge (= 41 mm) noch mit $\frac{7}{2}\frac{0}{0}$ zu multiplizieren, um l zu erhalten.

Es entspricht somit bei Bandantrieb
1 mm Winkelabweichung am Rad.
1000 mm der Antriebswelle

$$= \frac{134 \cdot 143{,}5}{1000 \cdot 82} \quad \ldots \ldots \ldots = 0{,}235 \text{ mm}$$

am Schreibstift

bei Magnetradantrieb 1 mm Winkelabweichung am Rad. 1 m der Antriebswelle $= \frac{134 \cdot 143{,}5}{1000 \cdot 79} \quad \ldots \ldots = 0{,}2435$ mm am Schreibstift.

Resultate.

Bei den Vorversuchen zeigte es sich, daß der Erregerstrom durch andere Einflüsse, z. B. den im Zeitschreiber periodisch fließenden Strom nicht beeinflußt werden darf. Bei den Versuchen 1—4 wurde die Tourenzahl möglichst konstant gehalten, dagegen die Anzahl der Federwindungen der einen Rückstellfeder, das α der Rechnung, geändert. Bei dem Versuch 5 wurde die Tourenzahl geändert, die Federn jedoch nicht.

Fig. 49. Versuch 1. Fig. 50. Versuch 2. Fig. 51. Versuch 3. Fig. 52. Versuch 4. Fig. 53. Versuch 5.

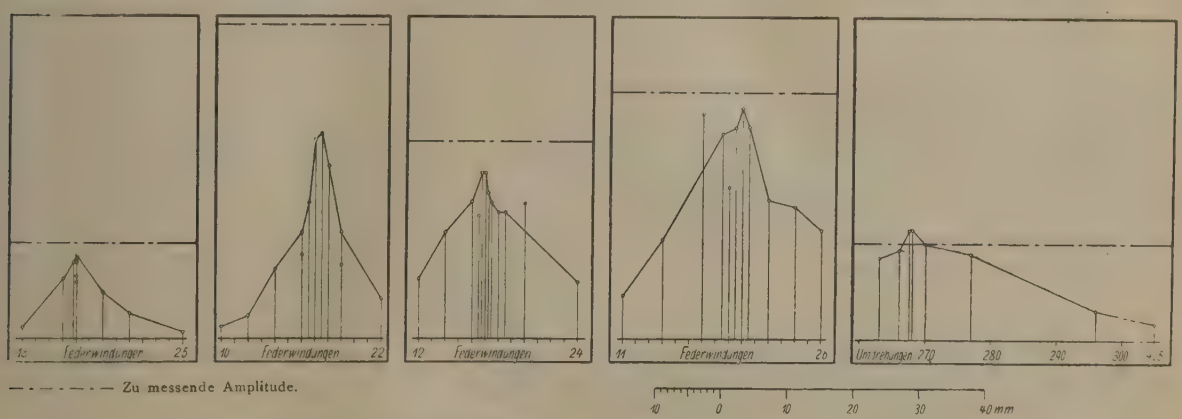


Fig. 49—53. Prüfung des Resonanz-Undographen, Modell II. Maßstab der Amplituden, gemessen am Schreibstift.

Die Resultate sind in Tabelle III und in Fig. 49 bis 53 zusammengestellt.

Die Versuche 1—3 lassen erkennen, daß der elastische Bandantrieb einen um so größeren Fehler hereinbringt, je größer die zu messende Amplitude wird. Deshalb wurde zu dem bereits früher erklärten Magnetradantrieb übergegangen.

Bei Versuch 5 wurde entweder e nicht genau genug gemessen oder die seitlich etwas schlagende Antriebsscheibe gab dem nicht eigens ausbalanzierten Schwingmagneten einen Impuls pro Umdrehung, den die Wirbelstrombremse nicht völlig zu vernichten vermochte. Letzterer Fehler trat später bei Vorversuchen an einem Dieselmotor in verstärktem Maße auf und wurde durch konstruktive Aenderung des Antriebes beseitigt.

B. Anwendung des Resonanz-Undographen.

1. Untersuchungen an einem 35 PS.-Dieselmotor.

Nach Durchführung der Prüfung des Resonanz-Undographen, Modell II wurde teils an der Betriebsdampfmaschine des Maschinenlaboratoriums der techn. Hochschule in München, teils an einem 35 PS.-Dieselmotor der techn. Hochschule in München der R.-U. praktisch anzuwenden versucht. Dabei stellten sich bereits früher besprochene konstruktive Aenderungen als nötig heraus. Nach deren Durchführung wurde der obenerwähnte Dieselmotor einer Untersuchung unterzogen, deren Resultate im folgenden mitgeteilt werden sollen.

Versuchsanordnung.

Die im Untergeschoß des Lehrgebäudes für anorganische Chemie der techn. Hochschule untergebrachte Maschinenanlage dient zur Erzeugung von Gleichstrom. Zwei Dieselmotoren zu je 35 PS mit 190 Umdrehungen i. d. Min. treiben durch Riemen je einen Gleichstromgenerator (Fig. 54). Die Motorwelle ist in den zwei Lagern der Motorfundamentplatte und in einem Außenlager unterstützt. Auf die beiden vorstehenden Wellenenden, auf der Schwungradseite, wie am freien Wellenende waren gußeiserne, abgedrehte Scheiben von je 443 mm $\varnothing$ aufgekeilt. Auf diesen Scheiben lief das Magnetrad des R.-U von 49,5 mm $\varnothing$. Der zur Erregung nötige Strom wurde einer Lichtleitung von 65 V entnommen und die Spannung durch Vorschaltung einiger Glühlampen reguliert.

Die Zeitzeichen wurden in primitiver Weise durch eine Kontaktfeder gegeben: Eine am Schubstangenkopf der Brennstoffpumpe befestigte Gummischnur zog einmal pro Periode die Feder von ihrer Kontaktstelle ab, wodurch der Stromkreis des Zeitschreibers zur Zeit der Brennstoffeinblasung („Zündung") unterbrochen wurde.

Uebersetzungsverhältnis des Schreibzeuges.

Es war bei den Versuchen:

Die auf die Hauptwelle des R.-U. reduzierte Schreibhebellänge l
nach direkter Messung am Apparat . . . = 255 mm
nach Rechnung . . . . . = 256 „

Somit entsprach:

1 mm Winkelabweichung am Rad . . . 1000 mm

$$\frac{443}{2} \cdot \frac{256}{1000 \; \frac{49{,}5}{2}} \quad \ldots \ldots = 2{,}29 \text{ mm}$$

am Schreibstift

oder 0,437 mm Winkelabweichung am Rad 1000 mm . . . . . = 1 mm am Schreibstift.

Resultate.

Sämtliche Versuche wurden vorgenommen, ohne den normalen Betrieb irgendwie zu beeinflussen, da sie einer Untersuchung des R.-U., nicht aber des Motors galten. Für letzteren Fall müßte man, um weitergehende Folgerungen ziehen zu dürfen, die Belastung konstant

halten, sowie eine genauere Kontaktunterbrechung für den Zeitschreiber verwenden. Die Belastung schwankte bei den Versuchen zwischen $^3/_4$ bis $^1/_1$, einmal war sogar nur $^1/_2$ Belastung vorhanden.

Die Resultate sind in der Tabelle IV zusammengestellt. Zum Vergleich sind die nach der üblichen Rechnung aus dem den Figuren 1 u. 2 zugrunde gelegten Tangentialdruckdiagramm bei der Annahme eines Ungleichförmigkeitsgrades $\delta = 1/80$ sich ergebenden Amplituden beigefügt. Die nicht für den 35 PS-Motor, sondern für einen älteren 8 PS-Motor gültige Tangentialdrucklinie wurde einer im Besitze des Laboratoriums f. theor. Maschinenlehre der techn. Hochsch. München befindlichen Zeichnung entnommen.

Tabelle IV.

	Schwingungen pro Periode	Amplitude der Winkelabweichung in mm. am Schreibstift	Amplitude der Winkelabweichung in mm. am Rad. 1 m.	Mittlerer Phasenwinkel in Graden.
Messungen an der Schwungradseite.	1	14,5 — 16 — 26	6,3 — 6,9 — 11,4	380 (360 — 400)
	2	6 — 8 — 11,3	2,6 — 3,5 — 4,9	225 — 255
	3	2,5 — 7	1,1 — 3,1	unsicher (150)
	4	0 — 3,5 — 4,2	0 — 1,5 — 1,8	135 — 175
Messungen an dem freien Wellenende	1	12 — 18 — 27 (35 bei $^1/_2$ Belastung)	5,2 — 7,9 — 11,8 (15,3)	380 — 400 (540)
	2	7 — 9 — 14	3 — 3,9 — 6,1	270
	3	3 — 5,5	1,3 — 2,4	180
	4	0 — ?	0 — ?	—
Aus Tangentialdruckdiagramm errechnet ρ. $\delta = 1:80$.	1	—	12,5	450
	2	—	4,0	225
	3	—	1,85	180
	4	—	0,57	135

Unter dem in Tabelle IV angegebenen „Phasenwinkel" ist der Winkel verstanden, den die Maschinenkurbel vom oberen Totpunkt bei Zündung bis zur maximalen voreilenden Winkelabweichung (ξ"max) beschreibt.

In Tabelle V sind die Verhältnisse der Amplituden der Schwingungen von verschiedener Periode zusammengestellt, in Fig. 55 sind die an der Schwungradseite gemessenen Winkelabweichungen von jeweils größter Amplitude übereinander gelagert dargestellt und zum Vergleich die aus dem Tangentialdruckdiagramm sich ergebende Kurve der Winkelabweichungen aus Fig. 2 übertragen.

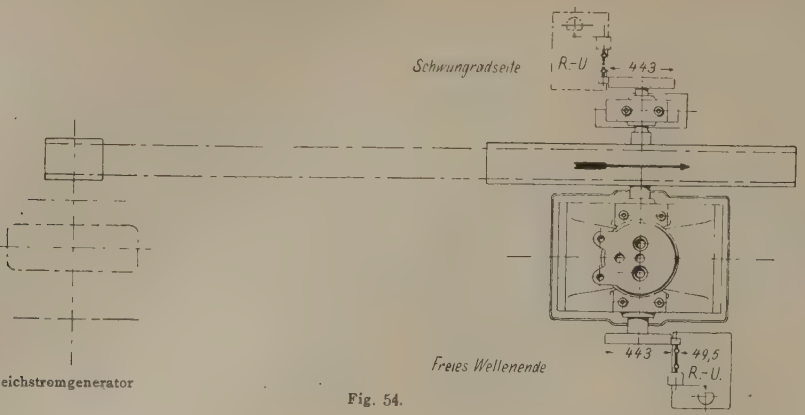


Fig. 54.

Tabelle V.

Verhältnisse der Amplituden der Schwingungen von verschiedener Periode.

Schwingungen pro Periode	1	2	3	4		
Messung an Schwungradseite	1	0,41	0,17	0	Kleinste	gemessene Amplituden
	1	0,43	0,27	0,16	Größte	
Messung an freiem Wellenende.	1	0,58	0,25	0	Kleinste	gemessene Amplituden
	1	0,52	0,20	—	Größte	
Errechnet aus Tangentialdruckdiagr.	1	0,32	0,15	0,045		

Bemerkenswert ist an den Versuchen, daß die zweite Schwingung der Winkelabweichung bei den Messungen sich größer herausstellte, als nach der Rechnung zu erwarten wäre, wahrscheinlich infolge des Kolbengewichtes, das elastische Verbiegungen hervorruft. Bei gleichzeitiger präziser Durchführung der Messung an beiden Seiten des Motors ließe sich aus den Unterschieden der Resultate die Torsionsbeanspruchung der Welle beurteilen.

2. *Untersuchung einer 850 KW-Drehstrommaschine.*

Die Versuche an dem Dieselmotor der techn. Hochsch. waren eben bis zu dem oben mitgeteilten Resultate gediehen, als der Verfasser auf Anregung und durch Vermittlung des Herrn Geh. Rat Prof. Dr. *M. Schroeter* von der Direktion der städtischen Elektrizitätswerke München beauftragt wurde, mit dem Resonanz-Undographen die Gleichförmigkeit des Ganges einer der 1200 PS-Dampfmaschinen des städtischen Elektrizitätswerkes an der Isartalstr. zu untersuchen. Gleichzeitig sollte der Ungleichförmigkeitsgrad durch einen Tachographen, sowie durch Entwicklung der Tangentialdruckkurve untersucht werden, eine Aufgabe, deren Durchführung Herr Dr.-Ing. *W. Deinlein*, übernahm.

Versuchsanordnung.

Die zu untersuchende Maschine war eine liegende Dreifachexpansionsmaschine mit geteiltem Niederdruckzylinder. Der direkt auf der Maschinenwelle sitzende Drehstromgenerator hatte bei 50 Per. i. d. Sek. 83,5 Umdrehungen i. d. Min. und leistete bei 5000 V Spannung 850 KW maximal. Das als Schwungrad ausgebildete Magnetrad trug 72 Pole. (Näheres siehe Z.V.D.I. 1901, S. 439 u. 1905, S. 37).

Für das Antriebsrad des R.-U. stand als Lauffläche ein abgedrehter Vorsprung des Generatormagnetrades von 4760 mm ⌀ zur Verfügung. Bei dem gewählten Durchmesser von 120 mm für das Antriebsrad ergibt sich eine Tourenzahl des R.-U. zu

$$n = 83{,}5\,\frac{4760}{120} = 3300 \text{ i. d. Min.}$$

Die Aufstellung des R.-U. an der Maschine zeigen Fig. 56 u. 57. Die Erregung des magnetischen Antriebsrades wie des Schwingmagneten erfolgte durch Akkumulatorenstrom von 110 V Spannung, unter Vorschaltung einiger Glühlampen. Der Zeitschreiber, hinter den Zeitschreiber des Tachographen geschaltet, wurde von einer bereits vorhandenen, zum Parallelschalten der Maschine dienenden Kontaktvorrichtung betätigt, die sehr gut arbeitete. Der Kontakt erfolgte, nach Angabe der Betriebsleitung, im Totpunkt (Deckelseite) der Hochdruckkurbel (I in Fig. 58). Er bestimmt den Phasenwinkel einer Schwingung, worunter der vom Moment des Kontaktes bis zur maximalen, voreilenden Winkelabweichung von der Kurbel beschriebene Winkel verstanden sei.

Uebersetzungsverhältnis des Schreibzeuges.

Es war bei den Versuchen die benutzte Schreibzeugvergrößerung dauernd 1 : 4, nach direkter Messung am Apparat.

Somit entspricht:

1 mm Winkelabweichung am Schreibzeug gemessen $= 1/4$ mm am Radius 2380 mm.

Bei 36 Wechselstromperioden pro Umdrehung wird die einer Periode entsprechende Bogenlänge am Rad. 2380 mm des Schwungrades $= \frac{4760\pi}{36} = 415$ mm. Denkt man sich diese Länge in 360 Teile geteilt, entsprechend 360 Periodengraden, so wird: 1 mm Winkelabweichung am Rad. 2380 mm = 0,868 Periodengraden.

Diese Darstellung (vgl. Fig. 58) ermöglicht die Beurteilung etwa fließender Ausgleichströme.

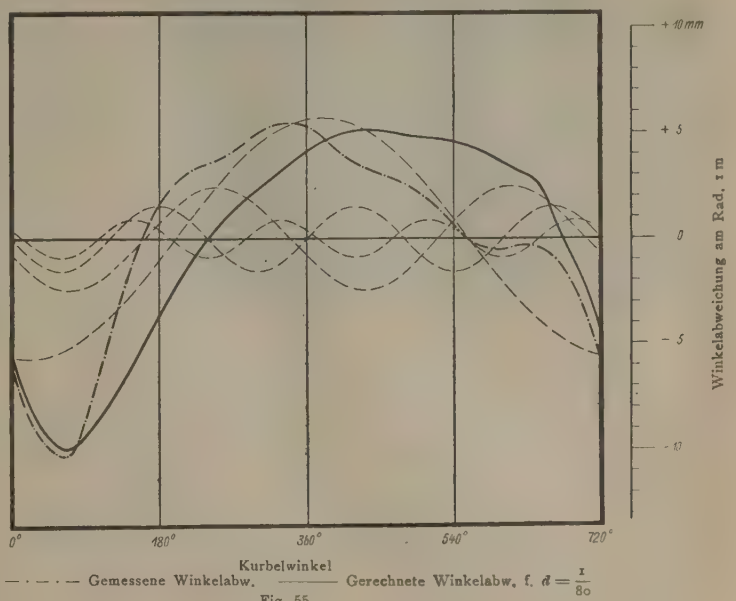


Fig. 55.

Resultate.

Die Versuchsresultate sind in Tabelle VI und in Fig. 58 zusammengestellt. Dazu sei folgendes bemerkt:

Vier Schwingungen pro Umdrehung waren nie zu konstatieren. Beim Uebergang von 45 Amp. zu 50 Amp. Belastung verschwand plötzlich die erste Schwingung.

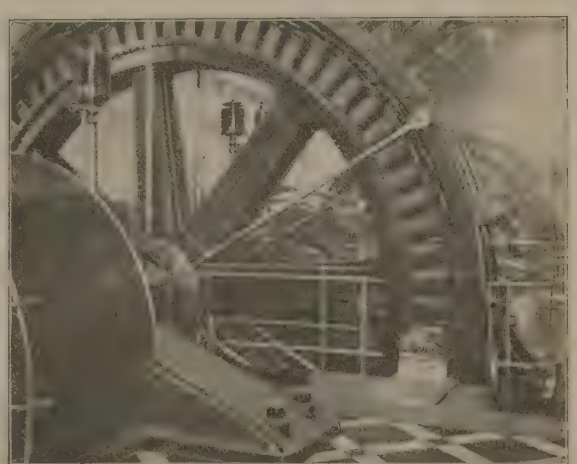


Fig. 56.

Bei 100 Amp. Belastung war die zweite Schwingung sehr gering, ihr Anwachsen war aber sofort bei Belastungsänderungen zu bemerken (8 mm). In Fig. 58 wurden die beobachteten Winkelabweichungen graphisch aufgetragen, und zwar wurden dazu gute Diagramme von möglichst maximaler Amplitude gewählt. Die zu der beobachteten Winkelabweichung ξ_4'' notwendigen

Tabelle VI.

Maschinenbelastung bei 5000 V.	Gemessene Amplitude am Rad. 2380 mm in mm.	Phasenwinkel.	Schwingungen pro Umdrehung.
Leerlauf mit Erregung	22	230°	1
	11 — 16,5	175°	2
	0,75 = 0	—	3
1/2 Bel. = 50 Amp.	0	—	1
	11 — 12,5	115°	2
	1 — 2	0°	3
1/1 Bel. = 100 Amp.	19 — 22	185°	1
	1,2 — 2,5 — (8)	40°	2
	0	—	3

Zur Belastung diente eine Synchronumformer, der eine Batterie mit Strom versorgte und auf den der Generator allein geschaltet war.

Geschwindigkeitsänderungen am Rad. 2380 mm sind darunter dargestellt. Sie wurden berechnet aus der Umkehrung der früher abgeleiteten Beziehungen:

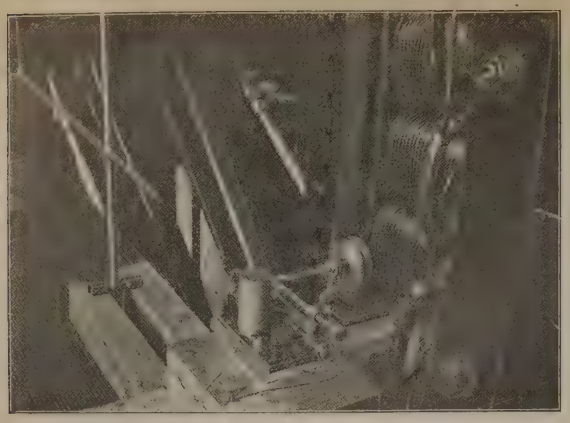


Fig. 57.

$$v_k'' = \frac{d\xi''}{dt} = \frac{d\{b_k \cos k(\alpha_0 t + \beta_k)}{dt} = -b_k \cdot k\alpha_0 \sin(\alpha_0 t + \beta_k)$$

Dabei ist für Kolbendampfmaschinen

Folgerungen.

Bei Leerlauf mit Erregung folgt die Maschine noch am meisten dem aus dem Tangentialdruckdiagramm sich ergebenden Winkelabweichungsgesetz.

Bei halber Belastung (50 Amp.) schwingt der Kranz mit einer Periode $= 1/2$ Umdrehung,

bei voller Belastung (100 Amp.) mit einer Periode $= 1$ Umdrehung.

Hier sei besonders darauf hingewiesen, daß die Kenntnis des sogenannten „Ungleichförmigkeitsgrades" noch keinen Maßstab für die dem Elektriker vor allem wichtige Winkelabweichung gibt. Es ergab z. B. bei Vollbelastung:

Das Tangentialdruckdiagramm

$\delta = 1/260$ u. $6{,}5^0$ max. Winkelabweichung,

die Messung am Schwungrad

$\delta = 1/450$ u. $5{,}0^0$ Winkelabweichung.

Ein bedeutenderes „Pendeln" der Maschine war nicht zu konstatieren. Dies war auch nicht zu erwarten, da der Synchronumformer dämpfend wirken mußte. Ein verstärktes Pendeln könnte erst beim Parallelbetrieb zweier Antriebsmaschinen auftreten.

3. Anwendungsgebiete.

Wie aus dem bisher Mitgeteilten hervorgeht, ist der Resonanz-Undograph geeignet, kleine, in raschen, stets

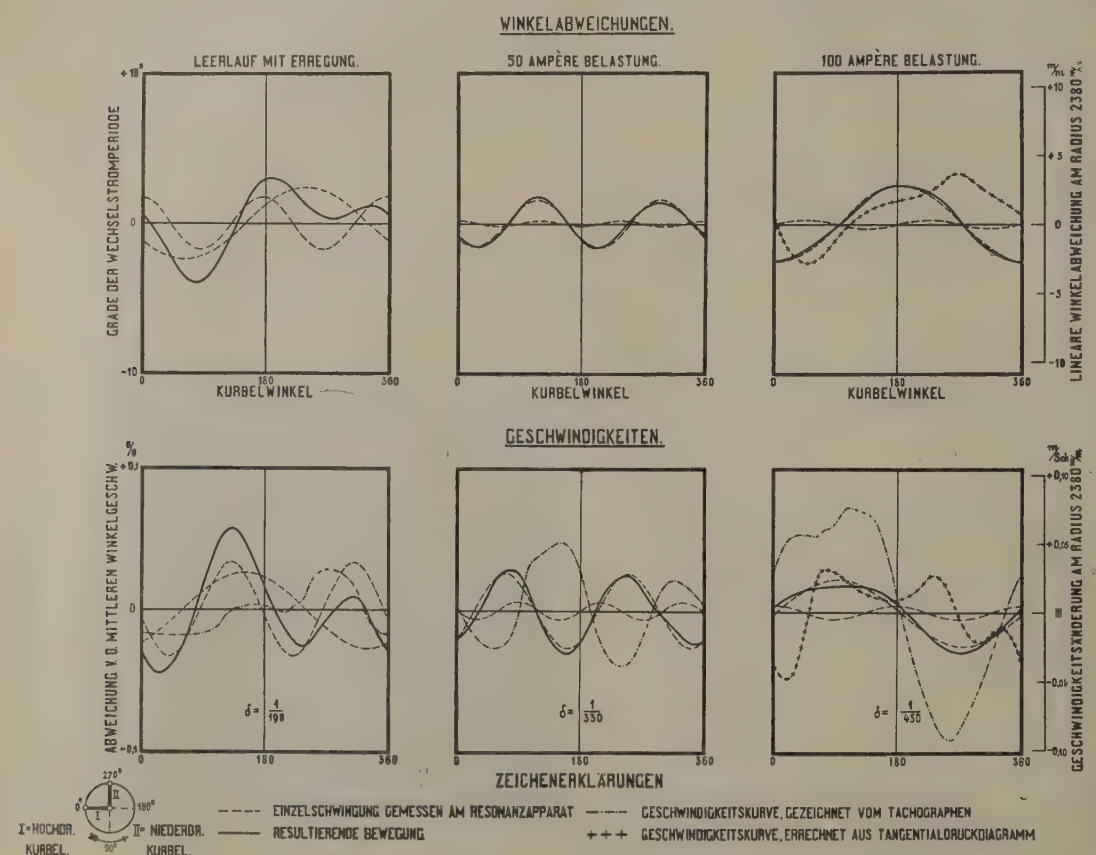


Fig. 58. Untersuchung einer 850 KW-Drehstrommaschine. $n = 83{,}5$ Spannung 5000 Volt, Periodenzahl 50 i. d. Sek.
Zum Vergleich sind hier noch die Tachographenkurven, vergrößert auf photographischem Wege, und die Resultate der Tangentialkraftuntersuchung für Maximalbelastung eingetragen.

$\alpha_0 = \frac{n\pi}{30}$, also $\alpha_0 = \frac{83{,}5\pi}{30} = 8{,}74$, somit

$v_1''\,\text{max} = -\,8{,}74\,\xi_1''\,\text{max}$
$v_2''\,\text{max} = -\,17{,}48\,\xi_2''\,\text{max}$
$v_3''\,\text{max} = -\,26{,}22\,\xi_3''\,\text{max}.$

gleichen Perioden wiederkehrende Winkelabweichungen zu messen.

Beispiele für seine Anwendungsmöglichkeit sind bei Verwendung eines Apparates:

die Messung des Ungleichförmigkeitsgrades einer

Maschine an einer beliebigen Stelle, wie z. B. Welle, Schwungradkranz, Steuerwelle;

bei Anwendung zweier, gleichzeitig arbeitender Apparate:

die Messung des Einflusses der Riemenübertragung auf den Ungleichförmigkeitsgrad,

die Messung des Pendelns von Drehstrommaschinen,

die Messung von Torsionsschwingungen.

Auch als Torsionsindikator kann der R.-U. verwendet werden, jedoch muß die konstante Verdrehung durch zwei Kontaktvorrichtungen, die die Zeitschreiber betätigen, gemessen werden. Einen Vorteil besitzt der R.-U. für diese Verwendung dadurch, daß er, unbeschadet dazwischen liegender Lager oder anderer Maschinenteile, an jede zugängliche Wellenstelle, gleichgültig von welchem Durchmesser, angelegt werden kann.

F. Anhang (Nebenrechnungen).

1. Auswertung der allgemeinen Integrale.

$$(\mathrm{I})=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{L+\cos x}=\int\frac{-du}{(L+u)\sqrt{1-u^2}},$$

für $\cos x=u$

$$x=\operatorname{arc}\cos u$$

$$dx=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$=\int\frac{dz}{z^2\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{-1+2Lz+(1-L^2)z^2}{z^2}}},$$

für $L+u=\frac{1}{z}$

$$u=\frac{1}{z}-L$$

$$du=-\frac{dz}{z^2}$$

$$\sqrt{1-u^2}=\sqrt{1-\frac{1-2zL+z^2L^2}{z^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{-1+2zL+(1-L^2)z^2}{z^2}}$$

$$=\left|\frac{-1}{\sqrt{L^2-1}}\operatorname{arc}\sin\frac{L+(1-L^2)z}{\sqrt{L^2+(1-L^2)}}\right|_{x=-\pi}^{x=\pi}$$

$$=\left|\frac{-1}{\sqrt{L^2-1}}\operatorname{arc}\sin\frac{L+\frac{1-L^2}{L+\cos x}}{\sqrt{1}}\right|_{x=-\pi}^{x=\pi}$$

$$=\pm\frac{-1}{\sqrt{L^2-1}}\cdot 2\pi$$

$$(\mathrm{II})=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x\,dx}{L+\cos x}=\int_{x=-\pi}^{x=\pi}\frac{-u\,du}{(L+u)\sqrt{1-u^2}}$$

$$=\int\frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}+\int\frac{L\,du}{(L+u)\sqrt{1-u^2}},\ da\ \frac{u}{(L+u)}=1-\frac{L}{(L+u)};$$

$$=\left|\operatorname{arc}\cos u\right|_{x=-\pi}^{x=\pi}-L\cdot(\mathrm{I})=\left|x\right|_{-\pi}^{\pi}-L\,(\mathrm{I})=2\pi-L\cdot(\mathrm{I})$$

$$=2\pi\mp\frac{L}{\sqrt{L^2-1}}2\pi$$

$$(\mathrm{III})=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2x\,dx}{L+\cos x}=\int\frac{-u^2\,du}{(L+u)\sqrt{1-u^2}}=$$

$$=\int\frac{-u\,du}{\sqrt{1-u^2}}-L\int\frac{-u\,du}{(L+u)\sqrt{1-u^2}},\ da\ \frac{u^2}{L+u}=u-\frac{uL}{L+u};$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx-L\,(\mathrm{II})$$

$$=\left|\sin x\right|_{-\pi}^{\pi}-L\,(\mathrm{II})$$

$$=0-L\,(\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{IV})=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 2x\,dx}{L+\cos x}=\int\frac{(2\cos^2x-1)\,dx}{L+\cos x}$$

$$=2\,(\mathrm{III})-(\mathrm{I})$$

$$(\mathrm{V})=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x\cos 2x\,dx}{L+\cos x}=\int\frac{(2\cos^3x-\cos x)\,dx}{L+\cos x}$$

$$=2\int\frac{-u^3\,du}{(L+u)\sqrt{1-u^2}}-(\mathrm{II})\cdot\ Da\ \frac{u^3}{L+u}=u^2-\frac{Lu^2}{L+u}:$$

$$=2\int\frac{-u^2\,du}{\sqrt{1-u^2}}-2L\int\frac{-u^2\,du}{(L+u)\sqrt{1-u^2}}-(\mathrm{II})$$

$$=2\int\cos^2x\,dx-2L\,(\mathrm{III})-(\mathrm{II})$$

$$=2\left|\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x\right|_{-\pi}^{\pi}-2L\,(\mathrm{III})-(\mathrm{II})$$

$$=2\pi-2L\,(\mathrm{III})-(\mathrm{II})$$

Diese Integrale genügen für die Auswertung der drei ersten Koeffizienten der früher erwähnten *Fourier*schen Reihen.

2. Koeffizientenauswertung für das Hookesche Gelenk.

Es war

$$v_1=v\frac{\cos\gamma}{1-\sin^2\gamma\sin^2\omega}=v\frac{k}{L+\cos x},\quad \text{wo } k=\frac{2\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\ \text{und}$$

$$L=\frac{2}{\sin^2\gamma}-1$$

Dann wird

$$b_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v\cdot\frac{k\cdot dx}{L+\cos x}=\frac{vk}{\pi}\,(\mathrm{I})$$

$$=\frac{vk}{\pi}\left(\pm\frac{2\pi}{\sqrt{L^2-1}}\right)=\pm v\cdot\frac{\frac{4\cos\gamma}{\sin^2\gamma}}{\sqrt{\frac{4}{\sin^4\gamma}-\frac{4}{\sin^2\gamma}+1}-1}$$

$$=\pm 2v$$

Nach unseren geometrischen Voraussetzungen brauchbar ist nur die Lösung:

$$\frac{1}{2}b_0=+v\qquad\text{und}\qquad(\mathrm{I})=\frac{2b_0\pi}{2vk}=\frac{2\pi}{k}$$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v\cdot\frac{k}{L+\cos x}\cdot\cos x\,dx=\frac{vk}{\pi}\,(\mathrm{II})$$

$$=\frac{vk}{\pi}\left[2\pi-L\,(\mathrm{I})\right]=v\left[2k-2L\right]$$

$$=2v[k-L]\qquad\text{und}\qquad(\mathrm{II})=\frac{b_1\pi}{vk}=\frac{2\pi[k-L]}{k}$$

$$b_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v\cdot\frac{k}{L+\cos x}\cos 2x\,dx=\frac{vk}{\pi}(\mathrm{IV})$$

$$=\frac{vk}{\pi}\left[2(\mathrm{III})-(\mathrm{I})\right]=\frac{vk}{\pi}\left[-2L(\mathrm{II})-(\mathrm{I})\right]$$

$$=\frac{vk}{\pi}\left[\frac{-4\pi L(k-L)}{k}\quad\frac{2\pi}{k}\right]$$

$$=-2v[2Lk-2L^2+1]$$

3. Koeffizientenauswertung für die Kurbelschleife.

Es war

$$v_1=v\cdot\frac{p\cos\omega+1}{1+p^2+2p\cos\omega}=\frac{v}{2}\cdot\frac{k+\cos x}{L+\cos x},\ \text{wo } k=\frac{1}{p}\ \text{und}$$

$$L=\frac{1+p^2}{2p}$$

Dann wird

$$b_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{v}{2}\cdot\frac{k+\cos x}{L+\cos x}\,dx=\frac{vk}{2\pi}(\mathrm{I})+\frac{v}{2\pi}(\mathrm{II})$$

$$=\pm\frac{vk}{2\pi}\left|\frac{2\pi}{\sqrt{L^2-1}}\right|+\frac{v}{2\pi}(2\pi-L(\mathrm{I}))$$

$$=\pm\frac{2vk}{2\sqrt{L^2-1}}+v-\frac{v\cdot L}{\sqrt{L^2-1}}=\pm v\frac{k-L}{\sqrt{L^2-1}}+v$$

$$=\pm v+v,\ \text{da}\ \frac{k-L}{\sqrt{L^2-1}}=\frac{\frac{1}{p}-\frac{1+p^2}{2p}}{\sqrt{\frac{1+2p^2+p^4-4p^2}{4p^2}}}$$

$$=\frac{\frac{1-p^2}{2p}}{\sqrt{\frac{(1-p^2)^2}{(2p)^2}}}=\pm 1$$

Nach unseren geometrischen Voraussetzungen brauchbar ist nur die Lösung:

$$\frac{1}{2}b_0=v\qquad\text{und}\qquad(\mathrm{I})=+\frac{2\pi}{\sqrt{L^2-1}}$$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{v}{2}\cdot\frac{k+\cos x}{L+\cos x}\cdot\cos x\,dx=\frac{vk}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x\,dx}{L+\cos x}$$

$$+\frac{v}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 x\,dx}{L+\cos x}$$

$$=\frac{vk}{2\pi}(\mathrm{II})+\frac{v}{2\pi}(\mathrm{III})=\frac{v}{2\pi}\left[k(\mathrm{II})-L(\mathrm{II})\right]$$

$$=\frac{v(k-L)}{2\pi}\left(2\pi\quad L\frac{2\pi}{\sqrt{L^2\quad 1}}\right)=v(k-L)\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2-1}}\right)$$

$$=v\left(\frac{1-p^2}{2p}\right)\left(1-\frac{\frac{1+p^2}{2p}}{\pm\frac{1-p^2}{2p}}\right)=v\left(\frac{1-p^2}{2p}\mp\frac{1+p^2}{2p}\right)=\begin{cases}-vp\\-\frac{v}{p}\end{cases}$$

Da für $p=0$ $b_1=0$ werden muß, so kann nur $b_1=-vp$ eine brauchbare Lösung sein. Somit

$$\sqrt{L^2-1}=+\frac{1-p^2}{2p}$$

$$b_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{v}{2}\cdot\frac{k+\cos x}{L+\cos x}\cdot\cos 2x\,dx=\frac{vk}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos 2x\,dx}{L+\cos x}$$

$$+\frac{v}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x\cos 2x\,dx}{L+\cos x}$$

$$=\frac{vk}{2\pi}(\mathrm{IV})+\frac{v}{2\pi}(\mathrm{V})$$

$$=\frac{vk}{2\pi}\left[2(\mathrm{III})-(\mathrm{I})\right]+\frac{v}{2\pi}\left[2\pi-2L(\mathrm{III})-(\mathrm{II})\right]$$

$$=\frac{vk}{2\pi}\left[-2L(\mathrm{II})-(\mathrm{I})\right]+\frac{v}{2\pi}\left[2\pi+2L^2(\mathrm{II})-(\mathrm{II})\right]$$

$$=\frac{v}{2\pi}\left\{(-2Lk+2L^2-1)(2\pi-L(\mathrm{I}))-k(\mathrm{I})+2\pi\right\}$$

$$=\frac{v}{2\pi}\left\{-2\pi\cdot 2L(k-L)+\frac{[L(2L(k-L))+L-k]\cdot 2\pi}{\sqrt{L^2-1}}\right\}$$

$$=v(k-L)\left\{-2L+\frac{2L^2-1}{\sqrt{L^2-1}}\right\}$$

$$=v\cdot\frac{1-p^2}{2p}\left\{\frac{-1-p^2}{p}+\frac{\frac{1+2p^2+p^4-2p^2}{2p^2}}{\frac{1-p^2}{2p}}\right\}$$

$$=v\quad\frac{1-p^2}{2p}\left\{\frac{-1+p^4+1+p^4}{p(1-p^2)}\right\}$$

$$=+vp^2$$

Druck von Max Schmersow, Kirchhain N.-L.

Druck von Max Schmersow, Kirchhain N.-L.